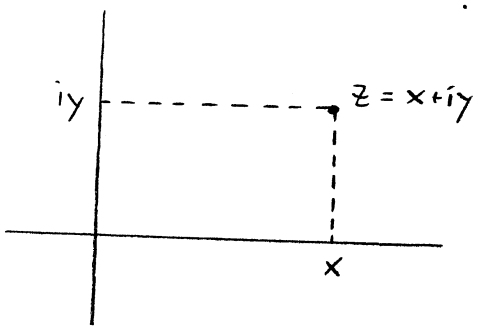
2. komplexe Zahlen

III.1. Definition & Rechenregeln

Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$

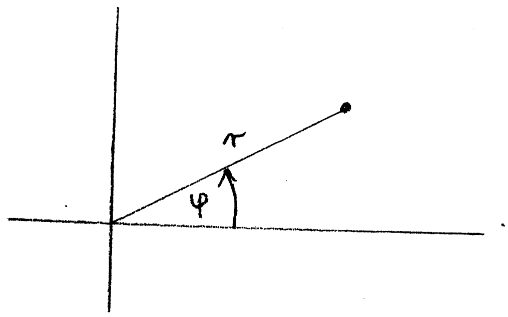
Darstellung in Kartesischen Koordinaten $\quad z = x + iy$



Realteil $\quad x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$

Imaginärteil $\quad y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$

in Polarkoordinaten $\quad z = r e^{i\varphi}$

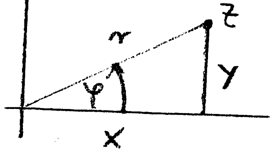


Betrag $\quad r \; ; \; r \geq 0$

Argument $\quad \varphi \; ; \; \varphi \in \mathbb{R}$
[Phase]

mit $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi \quad$ [Beweis später] folgt

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}}$$



Umrechnung von Polar- in Kartesische Koordinaten

andersrum:

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \arctan\frac{y}{x} \end{aligned}}$$

Achtung: - $z = 0 = 0 + i \cdot 0$

$\Rightarrow$ $r = 0$ aber φ beliebig

- $z \neq 0$

φ nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt

Rechenregeln: sei $z_1 = x + iy$

$z_2 = u + iv$

- Addition: $z_1 + z_2 = (x + iy) + (u + iv)$

$$= \underbrace{(x+u)}_{\mathrm{Re}(z_1+z_2)} + i \underbrace{(y+v)}_{\mathrm{Im}(z_1+z_2)}$$

- Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (x + iy) \cdot (u + iv)$

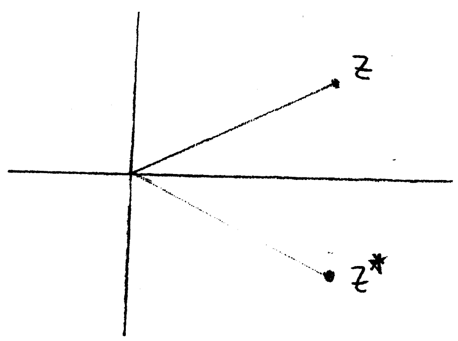
$$= x \cdot u + x \cdot iv + iy \cdot u + iy \cdot iv$$

$$= xu + i(xv + yu) + i^2 vy$$

$$\overset{(i^2=-1)}{=} \underbrace{(xu - vy)}_{\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2)} + i \underbrace{(xv + yu)}_{\mathrm{Im}(z_1 \cdot z_2)}$$

- Komplexe Konjugation: sei $z = x + iy$

dann $z^* = x - iy$: konjugiert komplexe Zahl



auch $\bar{z}$

Motivation

wozu braucht man komplexe Zahlen?

<u>sei:</u> $f(x) = x^2 - 5x + 6$

<u>gesucht:</u> Nullstellen der Funktion $f(x)$

das sind: $x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(5 \pm \sqrt{25-24}\right)$

$$x_1 = 3 \; ; \; x_2 = 2$$

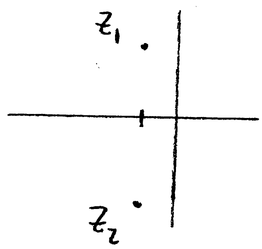
<u>sei:</u> $f(x) = x^2 + x + 1$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \underbrace{\sqrt{1-4}}\right)$$

$$= \sqrt{-3} = \sqrt{-1}\sqrt{3} = i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

besser $z_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$



↳ Nullstellen der Funktion $f(z)$

warum sind Nullstellen in der komplexen Zahlenebene sinnvoll?

<u>später:</u>

physikalische Problem (Mechanik, E-Dyn, ...) z.B. in Form einer Differentialgleichung (Kap. V)

↓

Ansatz für die Lösung

↓

z.B. Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$

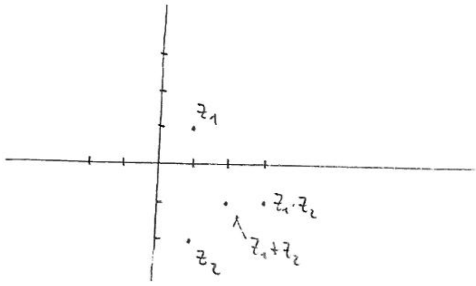
↓

Nullstellen $z_{1/2} \in \mathbb{C}$; $x_{1/2} \in \mathbb{R}$

einsetzen ⇒ phys. Problem gelöst

Komplexe Zahlen

→ Addition und Multiplikation



Beispiel : $z_1 = 1 + i$

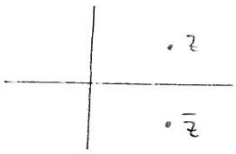
$z_2 = 1 - 2i$

$\Rightarrow \quad z_1 + z_2 = 2 - i$

$z_1 \cdot z_2 = (1+i)(1-2i) = 1 - 2i + i - i^2 2 = 3 - i$

→ Komplexe Konjugation

sei $z = x + iy$ dann ist $\bar{z} = x - iy$ die zu z Konjugiert komplexe Zahl (auch: z^*)



und es gilt : $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2 y^2$

$= x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$!

→ Division

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{z \cdot z^*} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$$

d.h. $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\text{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

z.B. : $\frac{i}{-2+i} = \frac{i(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-2i - i^2}{4 - i^2} = \frac{1}{5}(1 - 2i)$

→ außerdem gilt:

$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\,\text{Re}(z)$

$z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2i\,\text{Im}(z)$

und damit : $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

$\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

→ <u>die Funktion $e^{i\varphi}$</u>

siehe Kap. I.3 : Taylor-Reihe $\longrightarrow \quad e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R}$

Exponentialfunktion mit reellen Argument wird erweitert zu

$$\boxed{e^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ , \ z \in \mathbb{C}}$$

und speziell für $z = i\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$, folgt :

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \varphi^n = \dots$$

n	0	1	2	3	4	5	...
i^n	1	i	-1	$-i$	1	i	...

$$\dots = \frac{1}{0!}\varphi^0 + i\frac{1}{1!}\varphi^1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 - i\frac{1}{3!}\varphi^3 + \dots = \dots$$

Sortieren nach Real- und Imaginärteil :

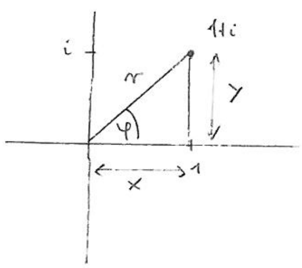
$$\dots = \frac{1}{0!}\varphi^0 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \dots + i\left(\frac{1}{1!}\varphi^1 - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \dots\right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2}}{n!}\varphi^n}_{\cos\varphi} + i \underbrace{\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!}\varphi^n}_{\sin\varphi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

jetzt : betrachte die komplexe Zahl $z = r e^{i\varphi} \qquad r \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}$

$$\longrightarrow \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \underbrace{r\cos\varphi}_{x} + i\underbrace{r\sin\varphi}_{y} = x + iy$$

z.B. $z = 1 + i$



$$x^2 + y^2 = r^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}$$

hier : $r^2 = 2$, $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$

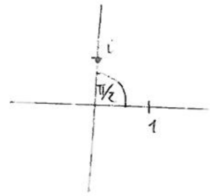
also $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

d.h. Umrechnung von

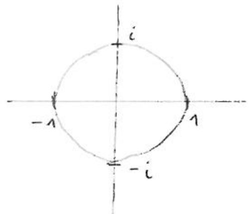
Kartesische Koordinaten (x,y) $\rightleftarrows$ Polarkoordinaten (r,φ)

- $z = e^{i\frac{\pi}{2}} \rightarrow r = 1, \ \varphi = \frac{\pi}{2}$

$$= \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = i$$



$\rightarrow$ die durch $z = e^{i\varphi}$ definierten komplexen Zahlen liegen auf dem Einheitskreis

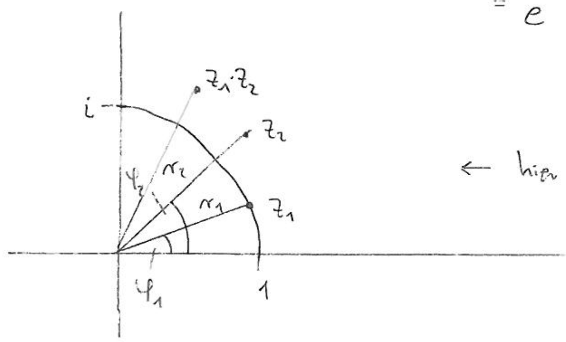


$\rightarrow$ Multiplikation komplexer Zahlen in Polarkoordinaten

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{i\varphi_1} \\ z_2 &= r_2 e^{i\varphi_2} \end{aligned}\right\} \quad z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \underbrace{e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}}_{= e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}} = r e^{i\varphi}$$

mit $r = r_1 r_2$

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$



$\leftarrow$ hier $r_1 = 1$

$\rightarrow \ z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

$\rightarrow$ Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

Beispiel: betrachte $e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$

$$\Rightarrow \ (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) =$$

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

Identität gilt für Real- und Imaginärteil unabhängig

$$\Rightarrow \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

$\longrightarrow$ Darstellung von Sinus und Cosinus durch $e^{i\varphi}$

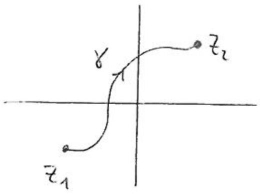
aus $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ folgt

$$e^{-i\varphi} = e^{i(-\varphi)} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) &= \cos\varphi \\ \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) &= \sin\varphi \end{aligned}}$$

Vol. Di

Wege in de Komplexen Ebene



Parametrisierung des Weges γ : $z(t)$ mit $t_1 \leq t \leq t_2$

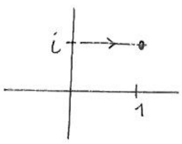
$z(t_1) = z_1$

$z(t_2) = z_2$

Beispiele:

→ $z(t) = t + i$

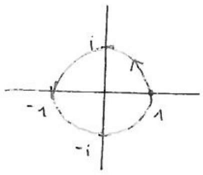
$0 \leq t \leq 1$



$z(0) = i = z_1$

$z(1) = 1+i = z_2$

→ $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$



$z_1 = z_2 = 1$

→ $z(t) = t$, $-\infty < t < \infty$

→ entlang der reellen Achse

→ $z(t) = it$, $-\infty < t < \infty$

→ entlang der imaginären Achse

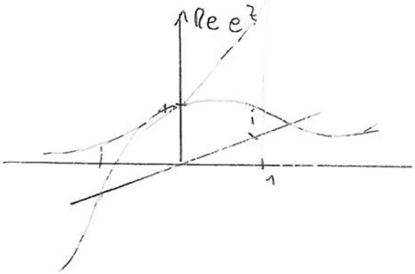
*

→ Real- und Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion $f(z)$ entlang eines Weges γ

z.B. $f(z) = e^z$

a, $z(t) = t \to e^{z(t)} = e^t$ rein reell

b, $z(t) = it \to e^{z(t)} = e^{it} = \cos t + i \sin t$



(schwer zu zeichnen!)

ev. am Computer!

* → wie transformiert sich der Weg $z(t) = t+i$, $0 \leq t \leq 1$, unter der Abbildung $z \mapsto iz$?

$i z(t) = it - 1$