3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.1 Grundbegriffe

was ist eine Differentialgleichung? (Dgl)

→ Gleichung, die die Funktion und ihre Ableitungen enthält

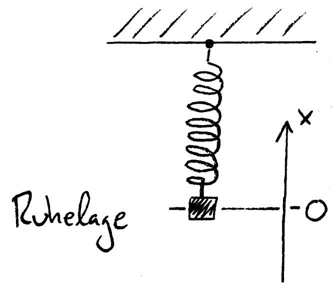
z.B. $f(x) = f'(x)$ $(*)$

Aufgabe: Lösung der Differentialgleichung, d.h. Auffinden der Funktionen $f(x)$

in $(*)$: $f(x) = e^x$, mit $f'(x) = e^x$ o.K.

einige Beispiele aus der Physik

a) Masse an einer Feder



Bewegung wird beschrieben durch

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$ Dgl

x: Auslenkung

t: Zeit

ω: enthält Federhärte, Masse

gesucht: Lösung der Dgl. → $x(t)$

hier $x(t) = \sin(\omega t)$ [später: Amplitude, Anfangsbed.]

denn $x'(t) = \omega \cos(\omega t)$

$x''(t) = -\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 x(t)$

Klassifizierung dieser Dgl:

gewöhnliche, homogene Dgl zweiter Ordnung mit Konstanten Koeffizienten
(1) (2) (3) (4)

(1): enthält keine partiellen Ableitungen (später)

(2): homogen: enthält nur Terme mit $x(t), x'(t), \ldots$

nicht wie in $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = a$ oder $= a(t)$

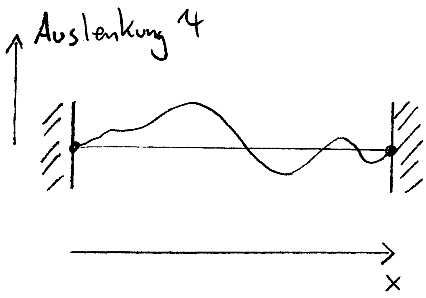
↳ inhomogen

(3): höchste, vorkommende Ableitung: $\frac{d^2}{dt^2}$

(4): Gegenbeispiel $t \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$

↳ nicht-konstanter Koeffizient

b) schwingende Saite



Zeit- und Ortsabhängigkeit der Auslenkung $\psi(t,x)$ beschrieben durch

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

-> partielle, homogene Dgl. zweiter Ordnung mit konstanten Koeff.

c, Quantenmechanik : Schrodingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\vec{r},t) \right] \Psi(\vec{r},t)$$

Lösung der SG $\rightarrow$ Wellenfunktion eines Teilchens der Masse m in einem Potential $V(\vec{r},t)$

partielle, homogene Dgl. zweiter Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten

d, Elektrodynamik : Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi \rho(\vec{r},t) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

...

Lösung der Maxwell-Gleichungen $\rightarrow$ elektrische und magnetische Feld bei vorgegebener Ladungs- und Stromdichte

System gekoppelter, partieller Dgl erster Ordnung, teilweise inhomogen mit konstanten Koeffizienten

<u>lineare Differentialgleichungen</u>

$\rightarrow$ gesuchte Funktion und Ableitungen treten nur linear auf

sonst : nicht-lineare Dgl

$\hookrightarrow$ enthält z.B. Terme der Form $(f(x))^2$, $f(x) \cdot f'(x)$, ...

$f_1(x)$ und $f_2(x)$ seien Lösungen einer homogenen, linearen Dgl.

$\rightarrow$ betrachte die Linearkombination $f_3(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ $\qquad c_{1/2} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f_3(x)$ ist ebenfalls Lösung dieser Dgl !

Beispiel : $\quad f'(x) + f(x) = 0$

Beweis durch Einsetzen von $f_3(x)$

nicht-homogene lineare Dgl

z.B. $f'(x) + f(x) = a(x)$ $(*)$ $a(x)$ gegeben

$f(x)$ gesucht

Achtung: Linearkombinationen sind i.A. keine Lösungen der DGl $(*)$

Beweis: seien $f_1(x), f_2(x)$ Lsg. der Dgl. $(*)$

bilde $f_3(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$

einsetzen ergibt: $f_3'(x) + f_3(x) =$

$$= \underbrace{c_1 f_1'(x) + c_1 f_1(x)}_{c_1 a(x)} + \underbrace{c_2 f_2'(x) + c_2 f_2(x)}_{c_2 a(x)} =$$

$$= (c_1 + c_2)\, a(x)$$

$\Rightarrow$ $f_3(x)$ ist nur dann eine Lsg. der inhomogenen Dgl. $(*)$ wenn $c_1 + c_2 = 1$

d.h. $f_3(x) = c_1 f_1(x) + (1 - c_1) f_2(x)$

betrachte jetzt die entsprechende homogene Dgl.

$$g'(x) + g(x) = 0 \qquad (**)$$

Behauptung: sei $f(x)$ Lsg von $(*)$

$g(x)$ Lsg von $(**)$

$\Rightarrow$ $h(x) = f(x) + c\, g(x)$ ebenfalls Lsg von $(*)$ $c \in \mathbb{R}$

Beweis: $h'(x) + h(x) = \underbrace{f'(x) + f(x)}_{= a(x)} + c\,\underbrace{(g'(x) + g(x))}_{= 0} = a(x)$