3.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

nochmals: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (*)$ linear, homogen

→ systematische Lösung von Dgl dieses Typs

Ansatz: $x(t) = A e^{\alpha t}$ d.h. Annahme einer speziellen Form für die Lösung

$$\Rightarrow \quad x'(t) = A\alpha e^{\alpha t} = \alpha x(t)$$

$$x''(t) = \alpha^2 x(t)$$

$$\vdots$$

$$x^{(n)}(t) = \alpha^n x(t)$$

einsetzen in (*) ergibt

$\alpha^2 x(t) + \omega^2 x(t) = 0$, für $A \neq 0$ d.h. $x(t) \neq 0$ folgt

$$\boxed{\alpha^2 + \omega^2 = 0} \quad \longrightarrow \quad \alpha_{1/2} = \pm i\omega \qquad (\omega \in \mathbb{R})$$

d.h. Reduzierung der Dgl. auf eine algebraische Gleichung!

⇒ Lösungen der Dgl

$x_1(t) = A_1 e^{i\omega t}$, $\quad x_2(t) = A_2 e^{-i\omega t}$

Dgl ist linear und homogen ⇒ allgemeine Lösung $x(t)$ ist die Linearkombination $x_1(t) + x_2(t)$

$$\boxed{x(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}} \qquad A_i \in \mathbb{C}$$

Umschreiben in sin und cos:

$$x(t) = A_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) + A_2 (\cos \omega t - i \sin \omega t)$$

$$= \underbrace{(A_1 + A_2)}_{=: B_1} \cos \omega t + \underbrace{(iA_1 - iA_2)}_{=: B_2} \sin \omega t$$

$$= B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$$

<u>allgemeine, homogene, gewöhnliche Dgl mit Konstanten Koeffizienten</u>

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$

Ansatz auch hier: $x(t) = A e^{\alpha t}$

$$\Rightarrow \quad a_n \alpha^n x(t) + a_{n-1} \alpha^{n-1} x(t) + \dots a_1 \alpha x(t) + a_0 x(t) = 0$$

für $A \neq 0$ folgt also

$$\boxed{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots a_1 \alpha + a_0 = 0}$$

α_i seien die Lösungen diese algebraischen Gleichung $(i = 1, \dots n)$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\alpha_i t}$$

<u>warum geht das nur bei Konstanten Koeffizienten?</u>

<u>Beispiel:</u> $x''(t) - t \cdot x(t) = 0$

Ansatz: $x(t) = A e^{\alpha t}$

$$\Rightarrow \quad \alpha^2 x(t) - t\, x(t) = 0$$

$$\alpha^2 = t \qquad \alpha = \pm\sqrt{t}$$

Achtung! in $x''(t) = \alpha^2 x(t)$ wird α unabhängig von t angenommen!

nächstes Beispiel:

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0 \qquad (*)$$

$$x(t) = A e^{\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$

$$(\alpha - 1)^2 = 0 \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = A e^{t}$$

entartete Lösung der algebraischen Gleichung

wie lautet die zweite Lösung?

Ansatz $\quad x_2(t) = x_1(t)\, f(t)$

$$\Rightarrow \quad x_2'(t) = x_1'(t)\, f(t) + x_1(t)\, f'(t)$$

$$= x_1(t)\left(f(t) + f'(t) \right)$$

siehe oben $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

$\alpha = 1$ hier!

$\Rightarrow x_1(t) = x_1'(t)$

$$x_2''(t) = x_1'(t)\left(f(t) + f'(t) \right)$$

$$+ x_1(t)\left(f'(t) + f''(t) \right)$$

$$= x_1(t)\left(f(t) + 2f'(t) + f''(t) \right)$$

einsetzen in $(*)$ ergibt

$$x_1(t)\left(f(t) + 2f'(t) + f''(t) - 2f(t) - 2f'(t) + f(t)\right) = 0$$

$$\underbrace{x_1(t)}_{\neq 0} f''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad f''(t) = 0$$

$$f'(t) = C$$

$$f(t) = Ct + B$$

$\Rightarrow$ die zweite Lösung lautet

$$x_2(t) = A e^{t}\left(\overset{C}{\cancel{B}}t + \overset{B}{\cancel{C}}\right)$$

Achtung, nicht dieselben A, B

und damit folgt für die allgemeine Lösung

$$\boxed{x(t) = (A + Bt)\, e^{t}}$$

physikalisches Beispiel:

Masse an einer Feder mit zusätzlicher Reibung der Form

$$2\gamma \frac{dx}{dt} \quad \text{(d.h. proportional der Geschwindigkeit)}$$

Dgl:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

Ansatz: $x(t) = A e^{\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2 = 0$

die beiden Lösungen für α lauten

$$\boxed{\alpha_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}$$

Fallunterscheidung

1, $\omega > \gamma$ schwache Dämpfung

$$\gamma^2 - \omega^2 < 0$$

$$\sqrt{\gamma^2-\omega^2} = i\sqrt{\omega^2-\gamma^2} = i\omega' \qquad \omega' \text{ reell}$$

$$\alpha_{1/2} = -\gamma \pm i\omega'$$

2, $\omega = \gamma$ mittlere Dämpfung (aperiodischer Grenzfall)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma$$

3, $\omega < \gamma$ starke Dämpfung (Kriechfall)

$$\gamma^2 - \omega^2 > 0$$

$$\alpha_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-\omega^2} \qquad \text{beide } < 0$$

Diskussion der einzelnen Fälle

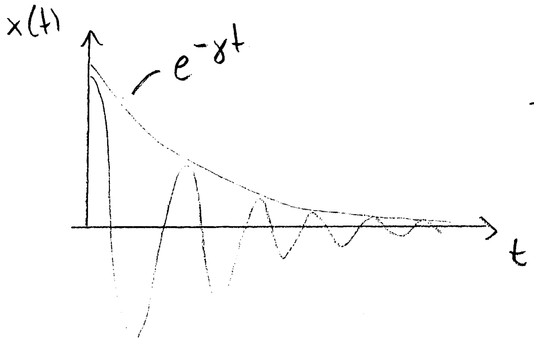
1, schwache Dämpfung

allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A e^{i\omega' t} + B e^{-i\omega' t}\right]$$

$$= e^{-\gamma t}\left[C \cos\omega' t + D \sin\omega' t\right]$$

physikalische Lösung: C und D reell



$\longrightarrow$ gedämpfte Schwingung mit Frequenz $\omega' = \sqrt{\omega^2-\gamma^2} < \omega$

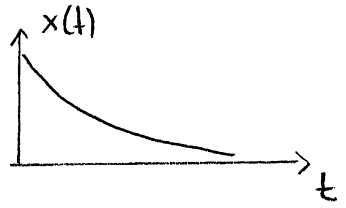
2, aperiodischer Grenzfall

$\gamma \to \omega$ d.h. $\omega' \to 0$

Periode der gedämpften Schwingung $\to \infty$

allgemeine Lösung $x(t) = (A + Bt)\, e^{-\gamma t}$

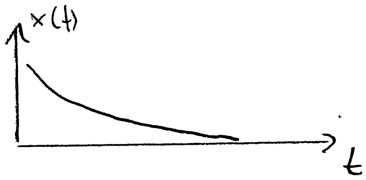
$\hookrightarrow$ da $\alpha_1 = \alpha_2$



3, stake Dämpfung

allgemeine Lösung: $x(t) = A_1\, e^{-\gamma_1 t} + A_2\, e^{-\gamma_2 t}$

mit $\gamma_{1/2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ beide > 0



stärker Abfall als in 2 !

<u>dominierende Teme für große t:</u>

2, $B t\, e^{-\gamma t}$

3, $A_2\, e^{-\gamma_2 t}$ $\gamma_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$

<u>Erweiteung auf den inhomogenen Fall</u>

speziell: $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = f(t)$ (*)

mit $f(t) = F\, e^{i\Omega t}$

Ansatz: $x(t) = x_0 \, e^{i\Omega t}$ dasselbe Ω wie in $f(t)$!!

$$\Rightarrow \quad x'(t) = i\Omega x_0 \, e^{i\Omega t}$$

$$x''(t) = -\Omega^2 x_0 \, e^{i\Omega t}$$

einsetzen in (*) ergibt

$$-\Omega^2 x_0 \, e^{i\Omega t} + \omega^2 x_0 e^{i\Omega t} = \mathcal{F} e^{i\Omega t}$$

$$x_0 (\omega^2 - \Omega^2) = \mathcal{F} \qquad x_0 = \frac{\mathcal{F}}{\omega^2 - \Omega^2}$$

$$\Rightarrow \quad x_p(t) = \frac{\mathcal{F}}{\omega^2 - \Omega^2} e^{i\Omega t}$$

spezielle Lösung, keine freien Parameter

allgemeine Lösung:

$$\boxed{x(t) = \frac{\mathcal{F}}{\omega^2 - \Omega^2} e^{i\Omega t} + A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}}$$

A_1, A_2 beliebig (festgelegt durch Anfangsbedingungen)

Falls Zeit bleibt: Beweis!