3.3 Gewöhnliche Differentialgleichungen mit nicht-konstanten Koeffizienten

erster Ordnung

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)\,y(x) = 0} \qquad (*)$$

gegeben: $p(x)$ gesucht: $y(x)$

Lösung der Dgl. $(*)$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} = -\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx \qquad \text{mit} \quad y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2)$$

sei $P(x)$ Stammfunktion zu $p(x)$

$\Rightarrow$

$$\left[\ln y\right]_{y_1}^{y_2} = -P(x_2) + P(x_1)$$

$$\ln \frac{y_2}{y_1} = P(x_1) - P(x_2)$$

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{P(x_1)}\,e^{-P(x_2)}$$

$$y(x_2) = \underbrace{y(x_1)\,e^{P(x_1)}}_{=A}\,e^{-P(x_2)}$$

schreibe $x_2 = x$ $\Rightarrow$ $\boxed{y(x) = A e^{-P(x)}}$

Test: $\displaystyle \frac{dy}{dx} = \underbrace{A e^{-P(x)}}_{y(x)} \underbrace{\frac{dP}{dx}}_{p(x)} \cdot (-1)$ ✓

Erweiterung auf den inhomogenen Fall

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)\,y(x) = q(x)} \qquad (*)$$

Ansatz: $$y(x) = \underbrace{e^{-P(x)}}_{\text{Lösung der homogenen Dgl}} v(x)$$

$$y'(x) = e^{-P(x)}\,v'(x) \underbrace{- v(x)\,p(x)\,e^{-P(x)}}_{= p(x)\,y(x)}$$

einsetzen in $(*)$ ergibt

$$e^{-P(x)}\,v'(x) = q(x)$$

$$\frac{dv}{dx} = q(x)\,e^{P(x)}$$

sei $Q(x)$ eine Stammfunktion zu $q(x)\,e^{P(x)}$,

$\Rightarrow$ $$v(x) = Q(x) + c$$

$$\boxed{y(x) = e^{-P(x)}\left(Q(x) + c\right)}$$

Beispiel: $$\frac{dy}{dx} + \frac{1+x}{x}\,y(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

d.h. $$p(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad P(x) = x + \ln x$$

$$q(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

$$q(x)\,e^{P(x)} = \frac{e^{-x}}{x}\underbrace{e^{(x+\ln x)}}_{= x e^{x}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{Q(x) = x}$$

$$y(x) = \underbrace{e^{-x-\ln x}}_{\frac{e^{-x}}{x}} (x+c)$$

$$\boxed{y(x) = e^{-x}\left(1 + \frac{c}{x}\right)}$$

"Anfangsbedingung": zB. $y(1) = 0$

$$e^{-1} \underbrace{(1+c)}_{=0} = 0 \qquad \Rightarrow \quad c = -1$$

$$y(x) = e^{-x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

jetzt allgemeiner

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \underset{\uparrow}{=} -\frac{p(x)}{q(y)}$$

nicht ganz so allgemein

reduziert sich für $q(y) = \frac{1}{y}$ auf $\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = 0$ (siehe oben)

jetzt: beliebige $q(y)$

Methode: Separation der Variablen

$$p(x)\,dx + q(y)\,dy = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx + \int_{y_1}^{y_2} q(y)\,dy = 0$$

sei $P(x)$ Stammfunktion zu $p(x)$

$Q(y)$ — " — $q(y)$

$$P(x_2) - P(x_1) + Q(y_2) - Q(y_1) = 0$$

auch hier: $y_1 = y(x_1)$

$y_2 = y(x_2)$

schreibe $x_2 = x \qquad y_2 = y$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q(y) = -P(x) + c}$$

Beispiel: $\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{y} = 0$ (nicht-linear Dgl.) $\rightsquigarrow \frac{1}{y}$

$p(x) = x^2 \quad \to \quad P(x) = \frac{1}{3}x^3$

$q(y) = y \quad \to \quad Q(y) = \frac{1}{2}y^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{3}x^3 + c$$

$$\boxed{y(x) = \sqrt{2c - \frac{2}{3}x^3}}$$

Test $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2c - \frac{2}{3}x^3}} \cdot \frac{2}{3}\cdot 3 \cdot x^2 (-1) = -\frac{x^2}{y}$ ✓

zweiter Ordnung

$$\boxed{y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0}$$

mit $p(x), q(x)$ nicht singulär bei $x=0$ (später z.B. $p(x) = \frac{1}{x}$)

Frobenius-Methode: Annahme → die Lösung $y(x)$ läßt sich als eine Potenzreihe um $x=0$ darstellen

d.h. $$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Lösung der Dgl. $\hat{=}$ Bestimmung der Koeffizienten c_n

Beispiel: $$\boxed{y'' + \omega^2 y = 0}$$ zur Illustration!

hier: $p(x) = 0 \quad q(x) = \omega^2$

⇒ gew. Dgl. mit konstanten Koeff.

allgemeine Lösung $$y(x) = A_1 e^{i\omega x} + A_2 e^{-i\omega x}$$

jetzt mit Frobenius-Methode

Ansatz: $$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, n\, x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n\, n(n-1)\, x^{n-2}$$

einsetzen in die Dgl.:

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n\, n(n-1)\, x^{n-2} + \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

läßt sich schreiben als:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \qquad (*)$$

mit:

$$a_0 = c_2\, 2\,(2-1) + \omega^2 c_0 = 2c_2 + \omega^2 c_0 \qquad (1)$$

$$a_1 = c_3\, 3\,(3-1) + \omega^2 c_1 = 6c_3 + \omega^2 c_1 \qquad (2)$$

$$\vdots$$

$$a_n = c_{n+2}\,(n+2)(n+1) + \omega^2 c_n \qquad (n)$$

Gl. $(*)$ muß erfüllt sein für alle x

$\Rightarrow \quad a_n = 0 \quad$ für $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\left.\begin{aligned} &\text{aus (1) folgt}: \quad c_2 = -\frac{\omega^2}{2}\, c_0 \\ &(2) \qquad\quad : \quad c_3 = -\frac{\omega^2}{6}\, c_1 \end{aligned}\right\} \quad c_0, c_1 \text{ unbestimmt}$$

sonst: Rekursionsrelation: Gl. (n) verknüpft c_{n+2} mit c_n

$$c_{n+2} = -\frac{\omega^2}{(n+2)(n+1)}\, c_n$$

gerade $\quad c_0 \longrightarrow c_2 \longrightarrow c_4 \longrightarrow c_6 \longrightarrow c_8 \quad \dots$

ungerade $\quad c_1 \longrightarrow c_3 \longrightarrow c_5 \longrightarrow c_7 \longrightarrow c_9 \quad \dots$

wie bekommt man aus der Rekursionsrelation eine allgemeine Formel für die c_n?

i) c_n für gerade n:

$$c_2 = (-1)^{\frac{2}{2}}\, \omega^2\, \frac{1}{1\cdot 2} \cdot c_0$$

$$c_4 = -\frac{\omega^2}{4\cdot 3}\, c_2 =$$

$$= (-1)^{\frac{4}{2}} \omega^4 \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} c_0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n = (-1)^{\frac{n}{2}} \omega^n \frac{1}{n!} c_0} \quad \text{für gerade } n$$

ii) c_n für ungerade n : $\quad c_1 = c_1$

$$c_3 = (-1)^{\frac{3-1}{2}} \omega^{3-1} \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} c_1$$

$$c_5 = -\frac{\omega^2}{5\cdot 4} \cdot c_3$$

$$= (-1)^{\frac{5-1}{2}} \omega^{5-1} \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} c_1$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n = (-1)^{(n-1)/2} \omega^{n-1} \frac{1}{n!} c_1}$$

<u>die Lösung hat also folgende Form:</u>

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} c_n x^n + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{1}{n!} \underbrace{\omega^n x^n}_{=(\omega x)^n} c_0 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} \frac{1}{n!} \underbrace{\omega^{n-1} x^n}_{=(\omega x)^n \frac{1}{\omega}} c_1$$

$$= c_0 \sum_{n'=0}^{\infty} (-1)^{n'} \frac{1}{(2n')!} (\omega x)^{2n'} + \frac{c_1}{\omega} \sum_{n'=0}^{\infty} (-1)^{n'} \frac{1}{(2n'+1)!} (\omega x)^{2n'+1}$$

$$\downarrow$$

$$n' = \frac{n}{2} \qquad\qquad n' = \frac{n-1}{2}$$

$$n = 2n'+1$$

$$= \underbrace{C_0}_{\equiv C} \cos(\omega x) + \underbrace{\frac{C_1}{\omega}}_{\equiv D} \sin(\omega x)$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung der Dgl. mit Hilfe der Frobenius-Methode:

$$\boxed{y(x) = C \cos(\omega x) + D \sin(\omega x)}$$