3.4 Partielle Differentialgleichungen

eindimensionale Wellengleichung $\boxed{\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$ (*)

$\rightarrow$ partielle Dgl für das Auslenkungsfeld $\xi(x,t)$

Lösung der partiellen Dgl.: Separation der Variablen

Ansatz: $\boxed{\xi(x,t) = f(x)\, g(t)}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = f(x) \frac{d^2 g}{dt^2}$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = g(t) \frac{d^2 f}{dx^2}$ $\rightarrow$ Einsetzen in (*)

$$\rightarrow \varrho\, f(x) \frac{d^2 g}{dt^2} = k\, g(t) \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \Big| \cdot \frac{1}{f(x)\, g(t)}$$

$$\underbrace{\varrho \frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g}{dt^2}}_{\text{hängt nicht von } x \text{ ab}} = \underbrace{k \frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f}{dx^2}}_{\text{hängt nicht von } t \text{ ab}}$$

Separationskonstante

das bedeutet: beide Seiten sind unabhängig von x und t, d.h. konstant $= \alpha$

$$\Rightarrow \quad \varrho \frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g}{dt^2} = \alpha \qquad \boxed{\text{(I)} \;\; \varrho \frac{d^2 g}{dt^2} - \alpha\, g(t) = 0}$$

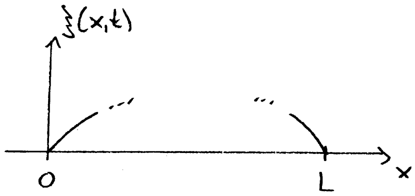
$$k \frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f}{dx^2} = \alpha \qquad \boxed{\text{(II)} \;\; k \frac{d^2 f}{dx^2} - \alpha\, f(x) = 0}$$

zwei gewöhnliche Dgl.

$\hookrightarrow$ dasselbe α in (I) und (II) !

der 1. Schritt: Lösung von Dgl. (II) für feste Randbedingungen

$\longrightarrow$



$$\left.\begin{array}{l} \xi(x=0,t) = 0 \\ \xi(x=L,t) = 0 \end{array}\right\} \text{ für alle Zeiten } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad f(x=0) = f(x=L) = 0$$

wähle Ansatz für $f(x)$, der die Randbedingung bei $x=0$ automatisch erfüllt.

$$\longrightarrow \quad \boxed{f(x) = \sin(qx)}\,^{(*)} \qquad q \in \mathbb{R}$$

die möglichen q-Werte ergeben sich aus: $\quad f(L) = 0$

$$\rightarrow \quad \sin(qL) = 0 \quad \rightarrow \quad qL = n\pi \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z}$$

auch hier:
- $n=0$ ergibt nur die triviale Lösung $\xi(x,t) = 0$
- n und $-n$ ergeben dieselben Lösungen

$$\Rightarrow \quad \boxed{q_n = \frac{n\pi}{L}} \qquad n = 1, 2, \dots, \infty \qquad \longrightarrow \quad f_n(x) = \sin(q_n x)$$

Einsetzen von $(*)$ in (II) ergibt $\quad -q^2 k \sin(qx) - \alpha \sin(qx) = 0$

$$\longrightarrow \quad \alpha = -kq^2 \qquad \boxed{\alpha_n = -kq_n^2 = -k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

jetzt zu Dgl. (I): $\quad \varrho \dfrac{d^2 g}{dt^2} + k\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2 g(t) = 0$

allgemeine Lösung für gegebenes n: $\quad g_n(t) = a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)$

$$\text{mit} \quad \varrho\,\omega_n^2 = k\left(\frac{n\pi}{L}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{\varrho}}\,\frac{n\pi}{L}}$$

damit ergeben sich die folgenden Lösungen der partiellen Dgl:

$$\xi_n(x,t) = f_n(x)\,g_n(t) = \sin(q_n x)\left[a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)\right]$$

jede Linearkombination von Lösungen einer linearen, homogenen, partiellen Dgl. ist ebenfalls eine Lösung

$$\Rightarrow \quad \text{allgemeine Lösung:} \quad \boxed{\begin{aligned} \xi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,g_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[a_n \sin\left(\sqrt{\frac{k}{\varrho}}\,\frac{n\pi}{L}\,t\right) + b_n \cos\left(\sqrt{\frac{k}{\varrho}}\,\frac{n\pi}{L}\,t\right)\right] \end{aligned}} \quad (*)$$

mit a_n, b_n festgelegt durch die Anfangsbedingungen