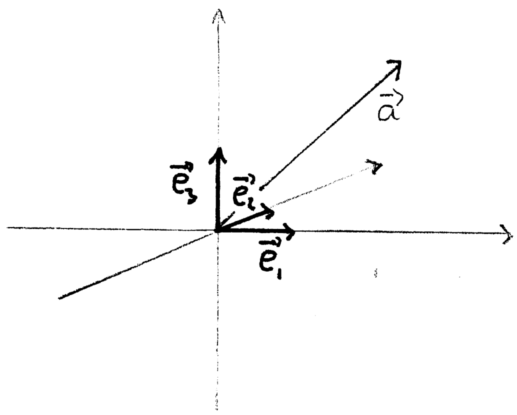
4. Vektoren, Matrizen, Tensoren

4.1 Vektoren

Vektoren in Komponentendarstellung

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

mit dem durch $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ & $\vec{e}_3$ aufgespannten Bezugsystem (Koordinatensystem)



$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ & $\vec{e}_3$ sind Einheitsvektoren (Länge 1)

Schreibweise: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ auch $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Addition zweier Vektoren

sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad c_i = a_i + b_i$$

Multiplikation mit Zahlen

$$\alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha \vec{a} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix}$$

Betrag eines Vektors (Länge)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}$$

$$|\vec{e}_i| = 1$$

Beispiele:

- gesucht ist $r = |\vec{r}|$, mit $\vec{r} = \vec{a} + 2\vec{b}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 + 0 \\ 1 + 2 \\ 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$r = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$$

- bestimme $\vec{e}_r$ = Einheitsvektor in Richtung $\vec{r}$

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

denn $|\vec{e}_r| = \frac{1}{r} |\vec{r}| = \frac{r}{r} = 1$

Definition: Inneres Produkt = Skalarprodukt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} := a\,b\,\cos(\sphericalangle\,\vec{a},\vec{b}) = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

dabei ist $\quad a = |\vec{a}|\,,\quad b = |\vec{b}|$

$\sphericalangle\,\vec{a},\vec{b} \equiv$ Winkel zwischen Vektor $\vec{a}$ und Vektor $\vec{b}$

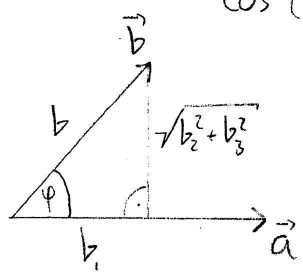
$\rightarrow$ Skalarprodukt invariant unter Wechsel des Koordinatensystems

$\sim$ wg $\cos(\sphericalangle\,\vec{a},\vec{b})$

$\rightarrow$ sei $\left.\begin{array}{l}\vec{a} = (a,0,0)\\ \vec{b} = (b_1,b_2,b_3)\end{array}\right\}\ \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a\,b_1$

zu zeigen: $\quad a\,b\,\cos(\sphericalangle\,\vec{a},\vec{b}) = a\,b_1$

$$\cos(\sphericalangle\,\vec{a},\vec{b}) = \frac{b_1}{b}$$

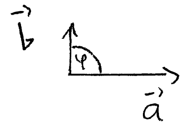


$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{b_1}{b}$ o.k.

Eigenschaften

- Kommutativ: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
- $a^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} \qquad (\cos(\sphericalangle\,\vec{a},\vec{a}) = 1)$
- Einheitsvektoren $\vec{e}\cdot\vec{e} = 1$
- distributiv: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
- $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ $(a, b \neq 0)$
sind zueinander orthogonal, $\vec{a} \perp \vec{b}$, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \sim \quad \cos\varphi = \cos(\sphericalangle \vec{a}, \vec{b}) = 0$$

Einheitsvektoren einer Koordinatensystems sind "orthonormiert"

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3$$

mit dem Kroneckersymbol
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i\right) \left(\sum_{j=1}^{3} b_j \vec{e}_j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}_{= \delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

Schwarzsche Ungleichung

$$\boxed{|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|}$$

folgt sofort aus der Definition:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = a\, b \underbrace{|\cos(\sphericalangle \vec{a}, \vec{b})|}_{\leq 1}$$

Äußeres Produkt (Kreuzprodukt, Vektorprodukt)

Definition: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (a kreuz b)

mit $|\vec{c}| = ab \sin(\sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b})$ ($\vec{c}$ ist Vektor!)

$\vec{c} \perp \vec{a}\,;\ \vec{c} \perp \vec{b}$

Berechnung von $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

[Merkregel $\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 \times & b_2 \\ a_3 \times & b_3 \\ a_1 \times & b_1 \\ a_2 \times & b_2 \end{matrix}$]

Eigenschaften

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ nicht kommutativ

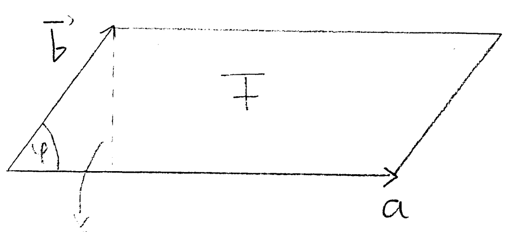
---

2. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

wegen $\sin(\sphericalangle\, \vec{a}, \vec{a}) = 0$ x der Formel für die Berechnung für $\vec{a} \times \vec{a}$

3. $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$

4. sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a b_3 \\ a b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = a\sqrt{b_2^2 + b_3^2}$



$\sqrt{b_2^2 + b_3^2} = b \cdot \sin\varphi$

$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| =$ Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

außerdem $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin\varphi = ab \sin(\sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b})$

5. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0 \quad , \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$

Beweis:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

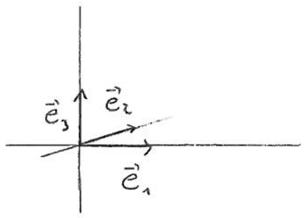
$$= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_2 a_1 b_3$$
$$+ a_3 a_1 b_2 - a_3 a_2 b_1 = 0$$

Koordinatensysteme

es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Lage eines Punktes im Raum zu beschreiben

a, Kartesische Koordinaten

wie oben:



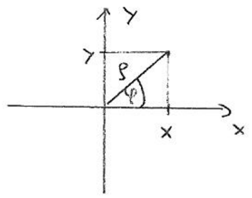
$$\rightarrow \vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \text{schreibe: } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b, Zylinderkoordinaten

verwende zur Beschreibung des Punkte $\vec{r}$ nicht (x,y,z), sondern die Zylinder-koordinaten (ρ, φ, z)

mit
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$
$$z = z$$



Umkehrung:
$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$
$$z = z$$

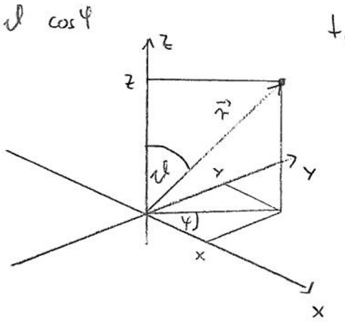
$\varphi \in [0, 2\pi[$, $\rho \geq 0$

c, Kugelkoordinaten

$$(x,y,z) \longleftrightarrow (r, \vartheta, \varphi)$$

$$z = r \cos\vartheta$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\tan\vartheta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$



$\vartheta \in [0, \pi]$

$\varphi \in [0, 2\pi[$

$r \geq 0$