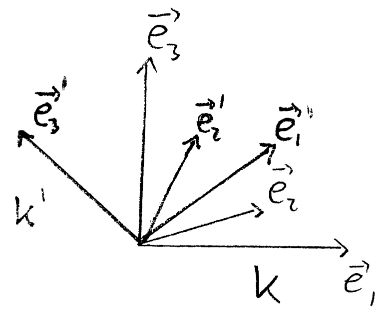
4.2 Matrizen, Determinanten, Matrixinversion

Drehung eines Koordinatensystems von K nach K'

K: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

K': $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$



gegeben: $\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ Darstellung im Koordinatensystem K

gesucht: Darstellung von $\vec{r}$ im Koordinatensystem K'

d.h. $\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i{}' \vec{e}_i{}'$ (gesucht: $x_i{}'$)

$\vec{r}$ selbst ist unabhängig vom Koordinatensystem

d.h. $\sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} x_i{}' \vec{e}_i{}'$

zunächst: Darstellung der neuen Basis im alten Koordinatensystem K

$$\vec{e}_i{}' = a_{i1} \vec{e}_1 + a_{i2} \vec{e}_2 + a_{i3} \vec{e}_3 \qquad i = 1,2,3 \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ 3 mal 3 Zahlen a_{ij}

Bedeutung der a_{ij}:

multipliziere $(*)$ mit $\vec{e}_j$ (Skalarprodukt)

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_i^{\,\prime} \cdot \vec{e}_j = a_{i1} \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_j}_{=\delta_{1j}} + a_{i2} \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_j}_{\delta_{2j}} + a_{i3} \underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_j}_{\delta_{3j}}$$

$$= a_{ij} \qquad \left[\sum_{n=1}^{3} a_{in} \delta_{nj} = a_{ij} ! \right]$$

$$\vec{e}_i^{\,\prime} \cdot \vec{e}_j = \underbrace{|\vec{e}_i^{\,\prime}|}_{=1} \underbrace{|\vec{e}_j|}_{=1} \cos \underbrace{(\sphericalangle\, \vec{e}_i^{\,\prime}, \vec{e}_j)}_{=\varphi_{ij}}$$

$= \varphi_{ij}$ Winkel zwischen neue i-Richtung und alter j-Richtung

$$\Rightarrow \quad a_{ij} = \cos \varphi_{ij}$$

<u>zurück zur Bestimmung der x_i':</u>

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} x_i' \vec{e}_i^{\,\prime} \qquad | \cdot \vec{e}_j^{\,\prime}$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j^{\,\prime}}_{= \vec{e}_j^{\,\prime} \cdot \vec{e}_i = a_{ji}} = \sum_{i=1}^{3} x_i' \underbrace{\vec{e}_i^{\,\prime} \cdot \vec{e}_j^{\,\prime}}_{=\delta_{ij}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_j' = \sum_{i=1}^{3} a_{ji} x_i}$$

Summation über zweiten Index

<u>Definition der Drehmatrix:</u>

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{= 3\times 3 \text{ Matrix } D} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$= 3 \times 3$ Matrix D : Drehmatrix

$$\begin{pmatrix} \circ \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\cdot \quad \cdot \quad \cdot} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \qquad \sim x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$$

<u>Bestimmung der x_i aus den x_i'</u>

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} x_i' \vec{e}_i{}' \qquad | \cdot \vec{e}_j$$

$$\boxed{x_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_i'}$$

Summation über ersten Index

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

Drehmatrix für die umgekehrte Transformation
von k' nach k
$\rightarrow$ inverse Matrix $D^{-1} = D^t$ (transponiert)

schreibe
$$\left.\begin{aligned} \vec{x}\,' &= D \vec{x} \\ \vec{x} &= D^{-1} \vec{x}\,' \end{aligned}\right\} \quad \vec{x}\,' = \underbrace{D D^{-1}}_{} \vec{x}\,'$$

$= \text{Einheitsmatrix } \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Beweis von $DD^{-1} = \mathbb{1}$</u>

$$x_j' = \sum_{i=1}^{3} a_{ji} x_i \qquad x_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ki} x_k'$$

einsetzen von x_i ergibt

$$x_j' = \sum_{i=1}^{3} a_{ji} \sum_{k=1}^{3} a_{ki} x_k'$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \underbrace{\sum_{i=1}^{3} a_{ki} a_{ji}}_{\overset{?}{=} \delta_{kj}} x_k'$$

<u>Beweis für</u> $\sum_{i=1}^{3} a_{ki} a_{ji} = \delta_{kj} \quad \hat{=} \quad DD^{-1} = \mathbb{1}$

folgt aus $\vec{e}_k{}' \cdot \vec{e}_j{}' = \delta_{kj}$

denn: $\vec{e}_k{}' = a_{k1} \vec{e}_1 + a_{k2} \vec{e}_2 + a_{k3} \vec{e}_3$

$\vec{e}_j{}' = a_{j1} \vec{e}_1 + a_{j2} \vec{e}_2 + a_{j3} \vec{e}_3$

$\vec{e}_k{}' \cdot \vec{e}_j{}'$ ergibt 9 Terme von denen nur die mit $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2$ & $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3$ übrigbleiben.

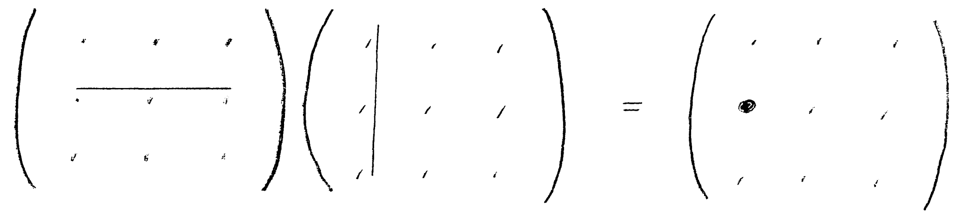
$\Rightarrow \quad \vec{e}_k{}' \cdot \vec{e}_j{}' = a_{k1} a_{j1} + a_{k2} a_{j2} + a_{k3} a_{j3} = \sum_{i=1}^{3} a_{ki} a_{ji} \quad \checkmark$

<u>analog gilt:</u> $D^{-1} D = \mathbb{1}$

<u>nochmal zur Matrixmultiplikation:</u>

$\vec{x}' = D D^{-1} \vec{x}'$ läßt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{= \mathbb{1}} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$



d.h. mit $$D D^{-1} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix}$$

$$U_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} \, a_{jk} = \delta_{ij}$$

Zeile Spalte i-te Zeile von D j-te Spalte von D^{-1}

$\Rightarrow \quad D D^{-1} = \mathbb{1}$

__allgemeine Definition einer Matrix__

$$\text{Matrix } A \equiv (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad m \times n\text{-Matrix}$$

Matrixelemente

$m \times n$ - Matrix A hat m Zeilen und n Spalten

__Einige Regeln:__

1. $A = B$ wenn: $a_{ij} = b_{ij}$ für alle i,j
   - beide Matrizen vom selben Typ

2. $C = A + B$: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

beide $m \times n$ $\Rightarrow$ C ist $m \times n$ - Matrix

Addition ist Kommutativ : $A + B = B + A$

3. Nullmatrix O $\rightarrow$ alle Matrixelemente $= 0$

$\Rightarrow$ $A + O = A$

4. Einheitsmatrix (nur bei quadratischen Matrizen ; d.h. vom Typ $n \times n$)

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{1} = (\delta_{ij})$$

5. sei $A = (a_{ij})$ $\Rightarrow$ $\alpha A = (\alpha a_{ij})$

6. Vektoren sind Matrizen vom Typ 1×3 bzw. 3×1

7. A^t : die zu A transponierte Matrix

sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ - Matrix

$\Rightarrow$ $A^t = (a_{ji})$ ist eine $n \times m$ - Matrix

8. Matrizenmultiplikation

Sei $A = (a_{ij})$ eine $m_A \times n_A$ - Matrix

$B = (b_{ek})$ eine $m_B \times n_B$ - Matrix

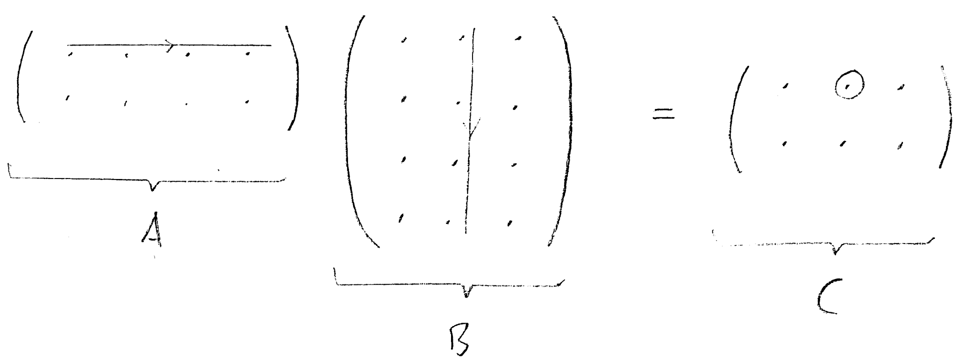
Falls $n_A = m_B$!

$\Rightarrow$ $C = AB$ das Produkt von A mit B mit den Matrixelementen

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n_A} a_{ij} b_{jk}$$

C ist vom Typ $m_A \times n_B$

Beispiel: A: 2×4 - Matrix, B: 4×3 - Matrix $\Big\}$ $C = AB$: 2×3 - Matrix



9. Matrixmultiplikation ist i.A. nicht kommutativ

$$AB \underset{\text{i.A.}}{\neq} BA$$

10. $A(BC) = (AB)C$

11. $A(B+C) = AB + AC$

nochmal zur Matrixmultiplikation

→ Vertauschbarkeit von Matrizen

sei A : $m \times n$ Matrix

B : $n \times m$ Matrix

definiere den Kommutator $C = [A,B]_- := AB - BA$

$\Rightarrow$ AB : $m \times m$ Matrix

BA : $n \times n$ Matrix

d.h.: um Subtraktion definieren zu können muß $n = m$ sein!

Def.: zwei Matrizen A $(n \times n)$ und B $(n \times n)$ vertauschen (kommutieren)

wenn $[A,B]_- = 0$

Beispiele

- $A = B \Rightarrow [A,B]_- = AA - AA = 0$
- $n = 1$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{bmatrix}$$

also $AB \neq BA$

Determinanten und Matrixinversion

Definition: unter der Determinante der $n\times n$ Matrix $A=(a_{ij})$

Symbol $\rightarrow$ $|A|$, $\mathrm{Det}(a_{ij})$, $|a_{ij}|$

verstehen wir die durch folgende Vorschrift zu berechnende Zahl

$$|A| \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \ldots (\pm)\, a_{1n}A_{1n}$$

A_{kl}: Unterdeterminante $\rightarrow$ Determinante der Matrix, die man durch Streichung der k-ten Zeile und l-ten Spalte erhält

d.h. obige Definition ist rekursiv

Det. n-ten Grades $=$ Summe von Det. $(n-1)$ten Grades

Beispiele:

- (1×1)-Matrix (a_{11})

  $\rightarrow$ $|A| = a_{11}$ (Teil der Definition)

- (2×2)-Matrix:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- (3×3)-Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$$
$$- a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31}$$
$$+ a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

$\rightarrow$ Sarrussche Regel für Deteminanten 3. Grades

$$|a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

geht <u>nur</u> für Det. 3. Grades

Zahl der Summanden einer Deteminante n-ten Grades:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

$n!$ Summanden mit je n Faktoren

<u>Definition:</u>

Deteminante einer $n \times n$ - Matrix (a_{ij}) ist die Zahl

$$\boxed{|A| := \sum_P (-1)^P \, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}}$$

die durch Summation über alle $n!$ Permutationen $j_1, j_2, j_3 \ldots j_n$ der Spaltenindizes aus der „natürlichen" Reihenfolge $1, 2, \ldots, n$ entsteht

$(-1)^P$: Vorzeichen der Permutation

zur Erläuterung:

die 6 Permutationen für $n=3$ und ihr Vorzeichen

1	2	3	+
1	3	2	−
2	1	3	−
2	3	1	+
3	1	2	+
3	2	1	−

jede Transposition erhält ein Minus-Zeichen

$1\,2\,3 \rightarrow 2\,1\,3$ $\qquad$ $2\,1\,3 \rightarrow 2\,3\,1$

$1\,2\,3 \rightarrow 1\,3\,2$ $\qquad$ $1\,3\,2 \rightarrow 3\,1\,2$

$1\,2\,3 \rightarrow 3\,2\,1$

Matrixinversion

zur Erinnerung: inverse Matrix einer Drehmatrix D :

$D^{-1} = D^t$; i.A. aber nicht so einfach

allgemeine Definition:

gegeben: quadratische Matrix A $(n \times n)$ $\quad A = (a_{ij})$

die $(n \times n)$-Matrix A^{-1} heißt invers zu A, falls

$$A^{-1} A = \underline{\mathbb{1}}$$

$A^{-1} = (x_{ij})$ $\qquad$ ebenfalls $(n \times n)$-Matrix

Bestimmung der x_{ij}: (ohne Beweis)

$$x_{ji} = \frac{1}{|A|} (-1)^{i-j} A_{ij}$$

!

Determinante von A

Unterdeterminante

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad |A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$x_{11} = \frac{1}{-2} \, 4 = -2$$

$$x_{12} = \frac{1}{-2} (-1) A_{21} = \frac{1}{2} \, 2 = 1$$

$$x_{21} = \frac{1}{-2} (-1) A_{12} = \frac{1}{2} \, 3 = \frac{3}{2}$$

$$x_{22} = \frac{1}{-2} \, 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Behauptung: aus $A^{-1}A = \mathbb{1}$ (Linksinverse) folgt

$AA^{-1} = \mathbb{1}$ (Rechtsinverse)

Beweis: sei B Linksinverse zu A^{-1}, d.h. $BA^{-1} = \mathbb{1}$

bilde $$A^{-1}(AA^{-1}) = \underbrace{(A^{-1}A)}_{= \mathbb{1}} A^{-1} = A^{-1}$$

multipliziere von links mit B

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(BA^{-1})}_{=\mathbb{1}}(AA^{-1}) = \underbrace{BA^{-1}}_{=\mathbb{1}} \quad \Rightarrow \quad AA^{-1} = \mathbb{1} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow B = A$

- Singuläre Matrizen

  Matrizen mit $|A| = 0$; haben kein Inverses

- Inverses eines Produkts:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad \text{für } |A| \neq 0 \text{ und } |B| \neq 0$$

Beweis durch Einsetzen:

$$(AB)^{-1}(AB) = \mathbb{1}$$

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = \mathbb{1}$$

$$B^{-1}\underbrace{(A^{-1}A)}_{=\mathbb{1}}B = \mathbb{1}$$

$$B^{-1}B = \mathbb{1} \quad \checkmark$$

- Inverse einer transponierten Matrix

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$