4.3 lineare Gleichungssysteme, Eigenwerte, Eigenvektoren

Beispiel: 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{I} & 3x + 4z = 3 \\ \mathrm{II} & 2x + 2y = 1 \\ \mathrm{III} & x - y - z = 0 \end{array}\right\}$$

lineares Gleichungssystem, x, y, z gehen nur linear ein

keine Term mit $\frac{1}{x}$, $\sqrt{y}$, z^2, xy, xz^3, ...

Lösungsmethode: aus I folgt

$$3x = 3 - 4z$$

$$x = 1 - \frac{4}{3}z \quad \mathrm{I}'$$

I' in II und III

$$\left.\begin{array}{ll} \Rightarrow \mathrm{II}': & 2\left(1 - \frac{4}{3}z\right) + 2y = 1 \\ \mathrm{III}': & 1 - \frac{4}{3}z - y - z = 0 \end{array}\right]$$

2 Gleichungen mit 2 Unbekannten

usw.

alternativ: Darstellung mit Matrizen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{= M} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{= \vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \vec{a}}$$

die Aufgabe lautet also: bestimme den Vektor $\vec{x}$ aus der Gleichung

$$\boxed{M \vec{x} = \vec{a}}$$

multiplizieren von links mit M^{-1} (falls $|M| \neq 0$)

$$M^{-1}(M\vec{x}) = M^{-1}\vec{a}$$

$$\underbrace{\underbrace{(M^{-1}M)}_{=\mathbb{1}}\vec{x}}_{=\vec{x}} = M^{-1}\vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{x} = M^{-1}\vec{a}}$$

d.h. Bestimmung von $\vec{x}$ durch

1. Matrixinversion $\rightsquigarrow M^{-1}$ (falls $|M| \neq 0$)
2. Multiplikation $M^{-1}\vec{a}$

<u>was passiert bei $|M| = 0$?</u>

i) Gleichungssystem nicht lösbar

z.B.
$$2x + 2y = 1$$
$$2x + 2y = 2$$

ii) mehr Unbekannte als Gleichungen

z.B.
$$2x + 2y = 1$$
$$2x + 2y = 1 \longrightarrow \text{keine neue Information}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} - y$$

$\Rightarrow$ Menge von Lösungen, statt einer eindeutigen Lösung

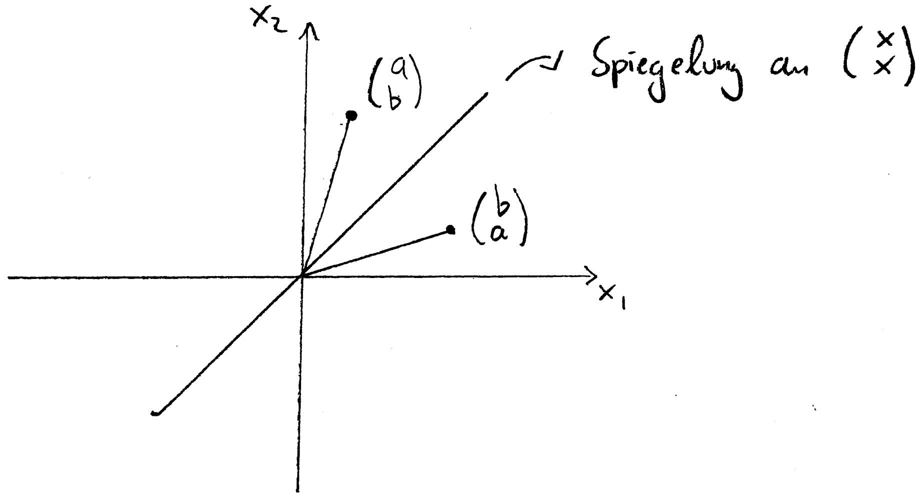
Eigenvektoren, Eigenwete

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wirkung dieses "Opeators" auf einen Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$M \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

geometische Interpretation



es gibt zwei Sorten "spezielle" Vektoren

→ $x_1 = x_2$ ⤳ $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ → von de Spiegelung unbeinflußt

$$M \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

→ $x_1 = -x_2$ ⤳ $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ → Vekta × (-1)

$$M \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

<u>Definition</u>: $\vec{x}$ ist Eigenvektor zur Matrix M falls

$$\boxed{M\vec{x} = a\vec{x}} \qquad a \in \mathbb{C} \text{ ist die zugehörige Eigenwert}$$

<u>Berechnung der Eigenvektoren und Eigenwerte</u>

schreibe $\quad M\vec{x} = a\vec{x} = a\mathbb{1}\vec{x}$

$$(M - a\mathbb{1})\vec{x} = \vec{0}$$

$$\vec{x} = (M - a\mathbb{1})^{-1}\vec{0}$$

Gleichung gelöst ?

- Falls $(M - a\mathbb{1})^{-1}$ existiert, d.h. $\det(M - a\mathbb{1}) \neq 0$

  $\Rightarrow (M - a\mathbb{1})^{-1}\vec{0} = \vec{0}$

  d.h. $\vec{x} = \vec{0}$ ist Eigenvektor zur Matrix M

  trivial! $\longrightarrow$ gilt immer!

  (das ist nicht, was wir wollen)

- Falls $\det(M - a\mathbb{1}) = 0$

  $\Rightarrow$ das Gleichungssystem $(M - a\mathbb{1})\vec{x} = \vec{0}$ hat mehr Unbekannte als Gleichungen; ist aber lösbar

$\Rightarrow$ Bedingung für die Existenz nicht-trivialer Eigenvektoren

$$\boxed{\det(M - a\mathbb{1}) = 0}$$

<u>Beispiel:</u> $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad M - a\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$

$\det(M - a\mathbb{1}) = a^2 - 1 \quad \leftarrow$ charakteristische Polynom

Lösungen $\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = -1 \end{array}\right\}$ Eigenwerte gefunden

<u>Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren</u>

<u>für $a_1 = 1$:</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & x_2 = x_1 \\ \text{II} & x_1 = x_2 \end{array}\right\}$ nur eine Gleichung!

$\rightarrow \quad x_1 = x_2 = x$

d.h. alle $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren zu M mit Eigenwert $a = +1$

Bedingung für $|\vec{x}|$? fehlt!

<u>denn:</u> (allgemein) sei $\vec{x}$ Eigenvektor zu M; dann ist auch

$\vec{y} = \alpha \vec{x}$ Eigenvektor zu M, für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$

<u>Beweis:</u> $M\vec{y} = M\alpha\vec{x} = \alpha M \vec{x} = \alpha a \vec{x} =$

$a \alpha \vec{x} = a \vec{y}$

für $a_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & x_2 = -x_1 \\ \text{II} & x_1 = -x_2 \end{array}\right\} \text{ wieder nur eine Gleichung}$$

$$\rightarrow x_1 = -x_2$$

falls erwünscht: Normierung der Eigenvektoren

$\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ norm. Eigenvektor zum Eigenwert $a_1 = 1$

$\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ —"— —— " —— $a_2 = -1$

entartete Eigenwerte

Beispiel:
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(M - a\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-a & 0 & 1 \\ 0 & 2-a & 0 \\ 1 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a) \begin{vmatrix} 2-a & 0 \\ 0 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 2-a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (1-a)^2(2-a) - (2-a)$$

$$= (2-a)(1 - 2a + a^2 - 1) = (2-a)(a-2)a$$

$$= 0$$

d.h. $(a-2)^2 a = 0$

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = 2$$

$\underline{a_1 = 0}$:

$$M\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad x_2 = 0 \;;\; x_1 = -x_3$$

$\Rightarrow$ normierter Eigenvektor $\quad \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\underline{a_2 = a_3 = 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2x_1 \;; & x_3 &= x_1 \\ 2x_2 &= 2x_2 \;; & 0 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 2x_3 \;; & x_1 &= x_3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ nur <u>eine</u> Gleichung $x_1 = x_3$;

keine Gleichung für x_2

d.h. jeder Vektor der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ ist

Eigenvektor zu M mit Eigenwert 2

$\rightarrow$ beliebige Auswahl orthonormierter Vektoren in dieser Ebene

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$