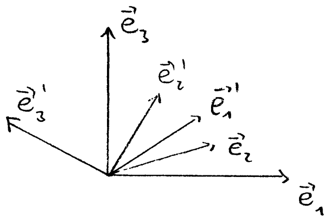
4.4 Tensoren

a) orthogonale Transformationen

Drehung eines Koordinatensystems von K nach K'



Basis in K: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

in K': $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$

Darstellung eines Vektors $\vec{r}$ in K: $\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i$

in K': $\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i' \vec{e}_i{}'$

es gilt: $x_j' = \sum_{i=1}^{3} d_{ji} x_i$ mit $d_{ji} = \vec{e}_j{}' \cdot \vec{e}_i$ $(= \cos\varphi_{ij})$

$x_j = \sum_{i=1}^{3} d_{ij} x_i'$

→ Transformation der Komponenten des Vektors beim Übergang $K \to K'$

die d_{ij} sind die Komponenten der Drehmatrix D

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

schreibe $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{x}' &= D\vec{x} \\ \vec{x} &= D^t \vec{x}' \end{aligned}}$$

es gilt: $D D^t = \mathbb{1}$

$\Rightarrow D^{-1} = D^t$

→ orthogonale Transformation

das Skalarprodukt ist invariant unter orthogonalen Transformationen

→ betrachte zwei Vektoren: $\vec{a}, \vec{b}$ in K, $\vec{a}', \vec{b}'$ in K'

$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = \sum_{i=1}^{3} a_i' b_i'$ mit $a_i' = \sum_{k=1}^{3} d_{ik} a_k$

$b_i' = \sum_{l=1}^{3} d_{il} b_l$

$$= \sum_{kl} \underbrace{\sum_i d_{ik} d_{il}}_{= \delta_{kl}} a_k b_l = \sum_k a_k b_k = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

das bedeutet : – Winkel zwischen zwei Vektoren sind erhalten

– Norm : $|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$ ist erhalten

im folgenden : Vektor = Tensor 1. Stufe

↳ definiert durch das Transformationsverhalten unter orthogonalen Transformationen

b) Definition : Tensoren

Tensor k-te Stufe in einem n-dimensionalen Raum (hier n=3)

ist ein 3^k-Tupel von Zahlen

$$\underbrace{T_{i_1, i_2, \ldots, i_n}}_{\text{die Komponenten des Tensors}} \qquad i_1 = 1,2,3 \; ; \; i_2 = 1,2,3 \; , \ldots$$

die sich beim Übergang $K \to K'$ folgendermaßen transformieren :

$$\boxed{T'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{l_1=1}^{3} \sum_{l_2=1}^{3} \ldots \sum_{l_n=1}^{3} d_{i_1 l_1} d_{i_2 l_2} \cdot \ldots \cdot d_{i_n l_n} T_{l_1 l_2 \ldots l_n}}$$

- **Tensor 0ter Stufe**

= Skalar : nicht indizierte Größe T mit

$$\boxed{T' = T} \qquad \text{ändert sich nicht beim Übergang } K \to K'$$

Beispiele : – Skalarprodukt (siehe oben)

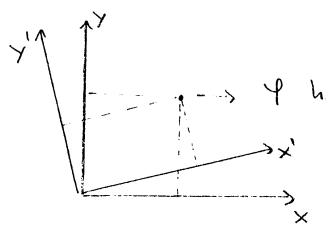
– skalare Felder

↳ Erweiterung des Tensorbegriffs auf Tensorfelder

$\varphi(\vec{r})$ ist ein skalares Feld (= Tensorfeld 0ter Stufe), wenn

$$\varphi'(\vec{r}\,') = \varphi(\vec{r}) \qquad \text{mit } \vec{r}\,' = D\vec{r}$$

, d.h. das Argument muss mittransformiert werden



→ φ hat denselben Wert an diesem Punkt im Raum in K ($\to \varphi(\vec{r})$) und K' ($\to \varphi'(\vec{r}\,')$)

- Tensor 1.ter Stufe

 = Vektor $$\boxed{F_i' = \sum_{l=1}^{3} d_{il} F_l}$$

Beispiele : – Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$

– Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r}) \longrightarrow A_i'(\vec{r}\,') = \sum_{l=1}^{3} d_{il} A_l(\vec{r})$

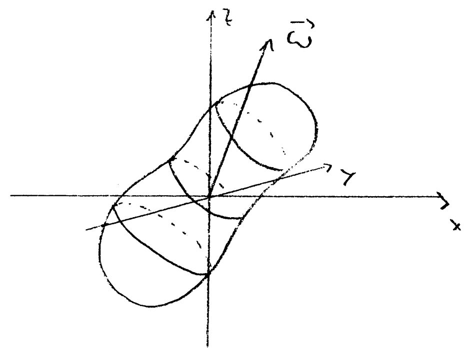
- Tensor 2ter Stufe

$$\boxed{F_{ij}' = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} d_{ik} d_{jl} F_{kl}}$$

$\longrightarrow$ Darstellung als quadratische (3×3) Matrix : $(F_{ij}) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}$

c) der Trägheitstensor

$\longrightarrow$ Kinetische Energie eines starren Körpers bei Rotation um Achse $\vec{\omega}$

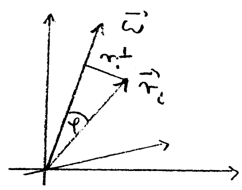


speziell : Schwerpunkt im Koordinatenursprung

$$\longrightarrow \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i(t) = \vec{0}$$

Rotation der einzelnen Massenpunkte des starren Körpers um die Achse $\vec{\omega}$:

$$\vec{v}_i(t) = \dot{\vec{r}}_i(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}_i(t)$$



$$\longrightarrow \underbrace{|\vec{v}_i(t)|}_{v_i} = \underbrace{|\vec{\omega}|}_{=\omega} \underbrace{|\vec{r}_i| \sin\varphi_i}_{= r_i^\perp}$$

Umlaufzeit : $T = \dfrac{2\pi r_i^\perp}{v_i} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ unabhängig von $r_i^\perp$

Kinetische Energie (Rotationsenergie) : $T_R = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$

$$\rightarrow \quad T_R = \frac{1}{2} \sum_i m_i \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2}_{= \omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2}$$

mit $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad T_R = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)(x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + x_{i3}^2) - (\omega_1 x_{i1} + \omega_2 x_{i2} + \omega_3 x_{i3})^2 \right]$$

Ordnen nach den Komponenten von $\vec{\omega}$ ergibt:

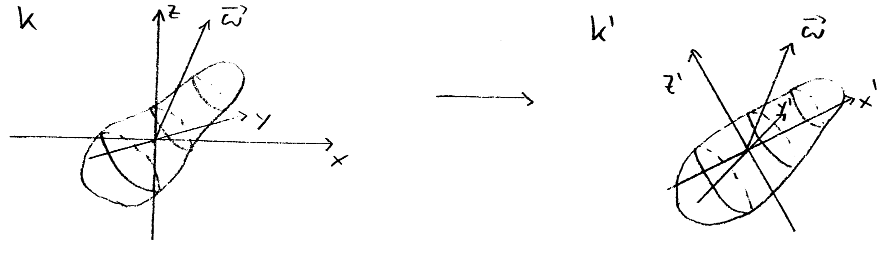
$$\boxed{T_R = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^{3} J_{lm} \, \omega_l \, \omega_m} \quad \text{mit} \quad \boxed{J_{lm} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_i^{\,2} \delta_{lm} - x_{il} x_{im} \right)}$$

die J_{lm} sind die Komponenten des Trägheitstensors J $\rightarrow$ Tensor 2. Stufe

$$J = (J_{lm}) = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (x_{i2}^2 + x_{i3}^2) & -\sum_i m_i x_{i1} x_{i2} & -\sum_i m_i x_{i1} x_{i3} \\ -\sum_i m_i x_{i2} x_{i1} & \sum_i m_i (x_{i1}^2 + x_{i3}^2) & -\sum_i m_i x_{i2} x_{i3} \\ -\sum_i m_i x_{i3} x_{i1} & -\sum_i m_i x_{i3} x_{i2} & \sum_i m_i (x_{i1}^2 + x_{i2}^2) \end{pmatrix}$$

<u>warum Trägheits-„Tensor"?</u>

$\rightarrow$ betrachte Drehung des Koordinatensystems von K nach K':



$\Rightarrow \quad \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}'$

$\quad \vec{r} \rightarrow \vec{r}\,'$

wie transformieren sich die Komponenten des Trägheitstensors?

$$J_{lm} \rightarrow J'_{lm}$$

es gilt: die kinetische Energie ist unabhängig vom Koordinatensystem

$$\rightarrow \quad T'_R = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^{3} J'_{lm} \, \omega'_l \, \omega'_m \stackrel{!}{=} T_R$$

mit $\omega'_l = \sum_{i=1}^{3} d_{li}\,\omega_i$, $\omega'_m = \sum_{j=1}^{3} d_{mj}\,\omega_j$ folgt :

$$T'_R = \frac{1}{2} \sum_{ij} \underbrace{\sum_{lm} d_{li}\, d_{mj}\, J'_{lm}} \omega_i \omega_j = \ldots$$

$$= \sum_{lm} d^t_{il}\, d^t_{jm}\, J'_{lm} = J_{ij}$$

Falls J Tensor 2. Stufe

$$\ldots = \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij}\, \omega_i \omega_j = T_R \qquad \text{ok.}$$