5. Vektoranalysis

5.1 Felder, partielle Ableitungen

- Skalare Felder: Abbildung $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

  physikalische Beispiele: Temperaturverteilung $T(\vec{r})$

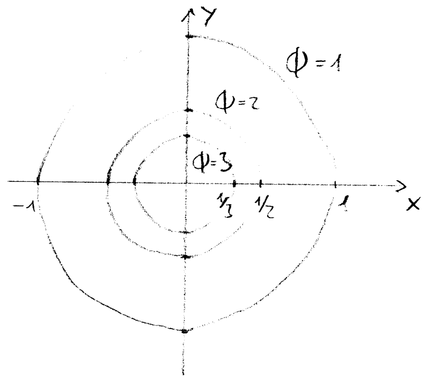
  Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$, Massendichte $\rho(\vec{r})$

  z.B. $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

  Veranschaulichung für $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; d.h. Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

  $\longrightarrow$ Höhenlinien: Linien mit konstantem $\Phi = \Phi_n$

  wähle z.B. $\Phi_n = n \cdot \Delta\Phi$



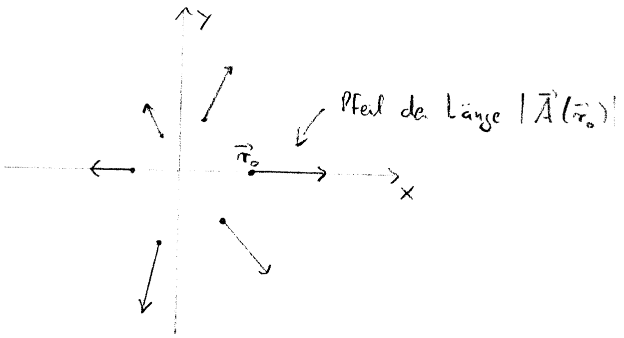
hier $\Delta\Phi = 1$

- Vektor-Felder: Abbildung $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

  physikalische Beispiele: Kraftfeld $\vec{K}(\vec{r})$ $\rightarrow$ z.B. Gravitationsfeld der Erde

  elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$, magnetisches Feld $\vec{B}(\vec{r})$

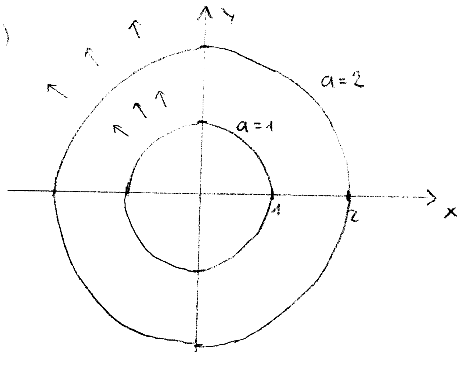
  z.B. $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$



betrachte das skalare Feld $a(\vec{r}) = |\vec{A}(\vec{r})| = |\vec{r}| = r$

Veranschaulichung: Höhenlinien von $a(\vec{r})$

\+ Pfeile in Richtung $\vec{A}(\vec{r})$



- partielle Ableitungen

sei $A(\vec{r})$ ein Feld (skalar oder Vektor) ; $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Def.: $$\boxed{\frac{\partial A}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{1}{\Delta x_1} \left[A(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - A(x_1, x_2, x_3) \right]}$$

analog: $\frac{\partial A}{\partial x_2}$, $\frac{\partial A}{\partial x_3}$

Beispiele: • sei $A(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial x_i} = a_i$$

• sei $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} = \vec{e}_i$$

höhere Ableitungen

z.B. $\frac{\partial^n A}{\partial x_1^n}$

gemischt: $\frac{\partial^n A}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}$ z.B. $\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial A}{\partial x_2}\right)$

es gilt: $$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_j \partial x_i}}$$ falls partielle Ableitungen stetig

Def.: $A(\vec{r})$ heißt stetig an der Stelle $\vec{r}_0$, wenn
$|A(\vec{r}) - A(\vec{r}_0)| \to 0$ für beliebige Wege $\vec{r} \to \vec{r}_0$