5.2 Gradient, Divergenz, Rotation

der Vektor-Differentialoperator $\vec{\nabla}$ (Nabla)

Def.: $$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$ hat als Komponenten keine Zahlen, sondern Differentiationsbefehle

Anwendung von $\vec{\nabla}$ auf Felder

Gradient : $\text{grad}\,\varphi \equiv \vec{\nabla}\varphi$ φ: skalares Feld

Divergenz : $\text{div}\,\vec{A} \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

Rotation : $\text{rot}\,\vec{A} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{A}$

(Divergenz, Rotation:) $\vec{A}$: Vektor-Feld

Gradient

Def. sei $\varphi(\vec{r})$ ein skalares Feld

$$\Rightarrow \quad \text{grad}\,\varphi \equiv \vec{\nabla}\varphi := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$ ergibt Vektor. "Gradientenfeld"

Beispiele:

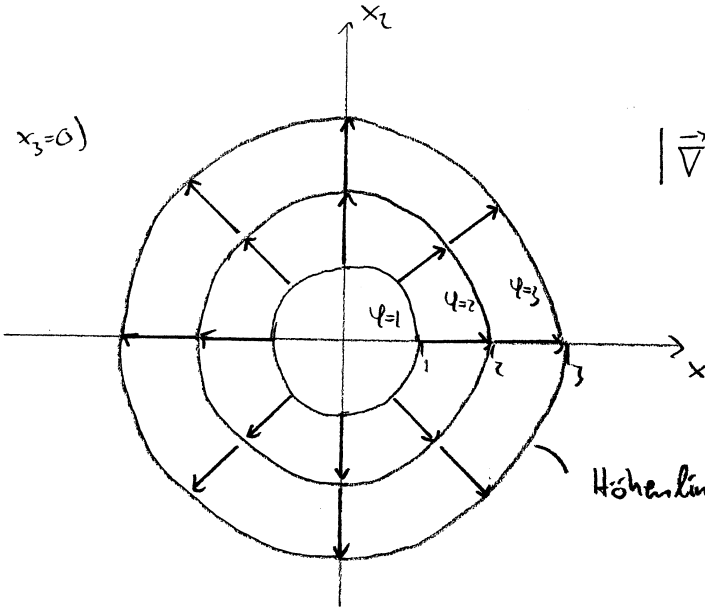
- $\varphi = a = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\varphi = \vec{0}$

- $$\varphi(\vec{r}) = r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_i}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Veranschaulichung:
(eigentlich Schnitt mit $x_3 = 0$)



$$|\vec{\nabla}\varphi| = \frac{|\vec{r}|}{r} = 1$$

Höhenlinien von $\varphi(\vec{r})$

Gradientenfeld steht $\perp$ auf den Höhenlinien

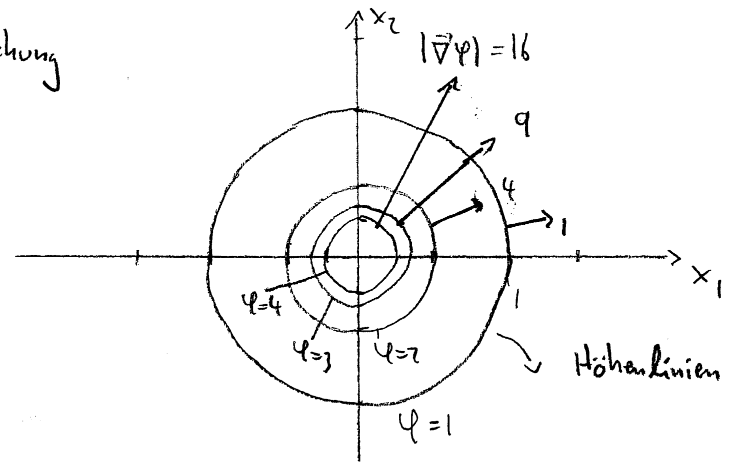
- $$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \frac{2x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} = -\frac{x_i}{r^3}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\varphi = -\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad |\vec{\nabla}\varphi| = \frac{|\vec{r}|}{r^3} = \frac{1}{r^2} \overset{!}{=} \varphi^2$$

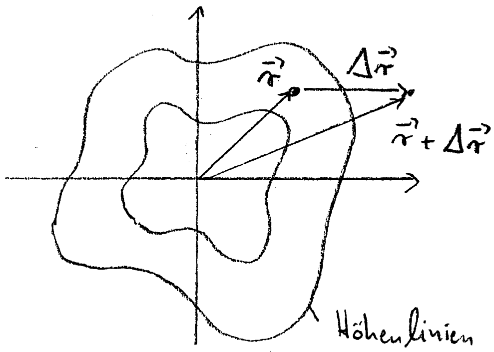
Veranschaulichung

Achtung ⊖



Höhenlinien von $\varphi(\vec{r})$

Änderung von $\varphi(\vec{r})$ in beliebige Richtungen



$$\Delta\varphi = \varphi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = \qquad \Delta\vec{r} = \begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \Delta x_3\end{pmatrix} ; \quad \vec{r} = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

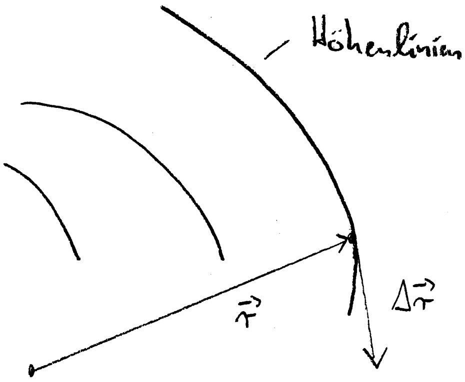
$$= \varphi\begin{pmatrix}x_1+\Delta x_1\\ x_2+\Delta x_2\\ x_3+\Delta x_3\end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\varphi\begin{pmatrix}x_1+\Delta x_1\\ x_2+\Delta x_2\\ x_3+\Delta x_3\end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix}x_1\\ x_2+\Delta x_2\\ x_3+\Delta x_3\end{pmatrix}}_{=\Delta x_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}} + \underbrace{\varphi\begin{pmatrix}x_1\\ x_2+\Delta x_2\\ x_3+\Delta x_3\end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3+\Delta x_3\end{pmatrix}}_{=\Delta x_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}}$$

im Limes $\Delta x_1 \to 0$

$$+ \underbrace{\varphi\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3+\Delta x_3\end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}}_{=\Delta x_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}} = \begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \Delta x_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot \Delta\vec{r}}$$



in dieser Richtung ist $\Delta\varphi = 0$

d.h. $0 = \vec{\nabla}\varphi \cdot \Delta\vec{r}$

$\Rightarrow$ **Richtung von $\vec{\nabla}\varphi$ ist stets senkrecht zu den Flächen mit $\varphi(\vec{r}) = \text{const}$**

Divergenz

Definition: gegeben sei Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1(\vec{r}) \\ A_2(\vec{r}) \\ A_3(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

: Divergenz von $\vec{A}(\vec{r})$ bzw. "Quellenfeld" von $\vec{A}(\vec{r})$

Beispiele und Rechenregeln:

- $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$
- $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3$
- $\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\vec{B} \times \vec{r}}_{} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$= \begin{pmatrix} B_2 x_3 - x_2 B_3 \\ B_3 x_1 - x_3 B_1 \\ B_1 x_2 - x_1 B_2 \end{pmatrix}$$

- $\operatorname{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \vec{B}$
- $\operatorname{div}(\alpha \vec{A}) = \alpha \operatorname{div} \vec{A} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{div}(\varphi \vec{A}) = \varphi \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \varphi \qquad \varphi$: skalares Feld

Laplaceoperator

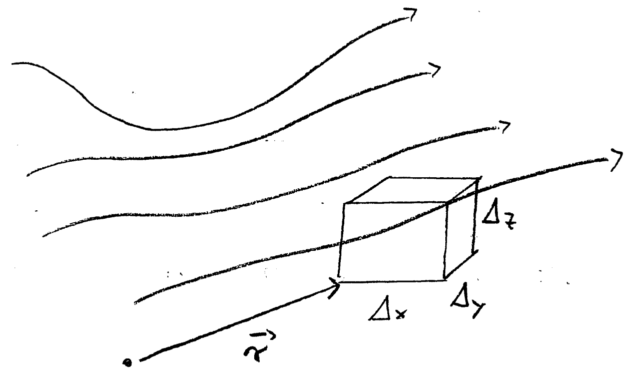
$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

$$\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}$$

Divergenz: Interpretation als lokale Quellstärke

Beispiel: Strömungsfeld $\vec{v}(\vec{r})$ = Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit



Teilchenstromdichte : $\vec{j}(\vec{r}) = n(\vec{r})\, \vec{v}(\vec{r})$

Teilchendichte

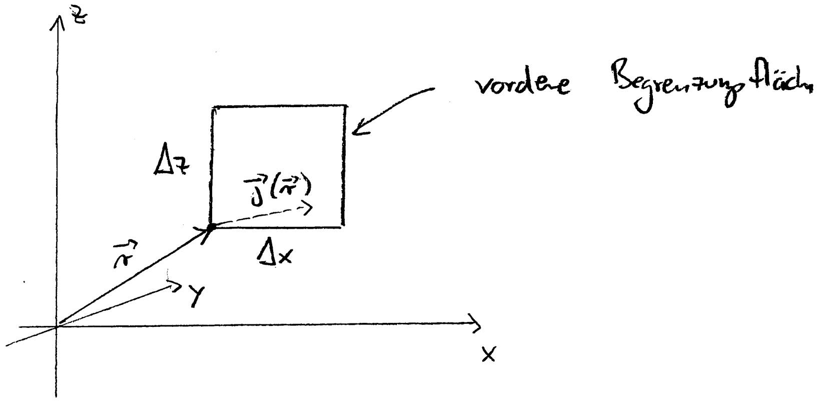
Teilchendichte $\vec{n}(\vec{r}) = \frac{\Delta N}{\Delta V}$ $\quad \Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

ΔN: Zahl der Teilchen im Volumen ΔV

zeitliche Änderung der Teilchendichte

es gilt $\frac{\partial}{\partial t} n(\vec{r},t) = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})$

Beweis: $\rightarrow$ Strömungsbilanz für den Quader



Berechne die Zahl der in der Zeit Δt durch diese Fläche durchströmenden Teilchen; $\Delta x, \Delta z$ klein $\Rightarrow$ $\vec{j}$ auf der Fläche konstant

$$\Delta N_{y,1} = n \cdot \Delta V$$

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta y = v_y \cdot \Delta t \qquad \text{(d.h. spezielle Wahl von } \Delta t\text{)}$$

$$= n\, v_y(\vec{r})\, \Delta t\, \Delta x \Delta z$$

Zahl der durch die hintere Begrenzungsfläche ausströmenden Teilchen

$$\Delta N_{y,2} = n\, v_y(x, y+\Delta y, z)\, \Delta t\, \Delta x\, \Delta z$$

$\Rightarrow$ Änderung der Teilchendichte

$$\frac{1}{\Delta V}\left(\Delta N_{y,1} - \Delta N_{y,2}\right) = n \Delta t \underbrace{\frac{1}{\Delta y}\left(v_y(x,y,z) - v_y(x,y+\Delta y,z)\right)}_{\to -\frac{\partial}{\partial y} v_y(x,y,z)}$$

$$= -\Delta t \frac{\partial}{\partial y} j_y(x,y,z)$$

<u>Gesamtbilanz (alle 6 Grenzflächen)</u>

$$-\Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} j_x(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial y} j_y(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial z} j_z(\vec{r})\right) = -\Delta t\, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})$$

$$\to \boxed{\frac{\partial}{\partial t} n(\vec{r},t) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})}$$

$\Rightarrow$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$ ist das Quellenfeld des Vektorfeldes $\vec{j}$

Rotation

Definition: gegeben sei das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

$$\Rightarrow \quad \text{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1(\vec{r}) \\ A_2(\vec{r}) \\ A_3(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

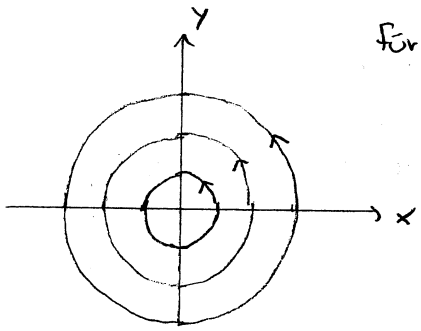
Rotation von $\vec{A}(\vec{r})$

"Wirbelfeld" von $\vec{A}(\vec{r})$

Rotation: Interpretation als lokale Wirbelstärke

betrachte Strömungsfeld eines homogenen Wirbels

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



für $\vec{\omega} \parallel \vec{e}_z$

Umlaufzeit:

$$|\vec{v}(\vec{r})| = \omega r \quad (\text{für } z = 0)$$

$$\text{Umfang} = 2\pi r \qquad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{2\pi r}{\omega r} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Drehfrequenz} = \frac{\omega}{2\pi}$$

ω: Maß für die Wirbelstärke

Berechne: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ für $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} = \ldots$$

$$\ldots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega + \omega \end{pmatrix} = 2\vec{\omega}$$

$\Rightarrow$ $\text{rot}\,\vec{v}(\vec{r})$: Wirbelfeld von $\vec{v}(\vec{r})$

Eigenschaften und Rechenregeln

- $\text{rot}\,(\vec{A} + \vec{B}) = \text{rot}\,\vec{A} + \text{rot}\,\vec{B}$
- $\text{rot}\,(\alpha \vec{A}) = \alpha\,\text{rot}\,\vec{A} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$
- $\text{rot}\,(\varphi \vec{A}) = \varphi\,\text{rot}\,\vec{A} + (\text{grad}\,\varphi) \times \vec{A} \qquad \varphi$: skalares Feld

$\boxed{\text{Gradientenfelder sind stets wirbelfrei}}$: $\boxed{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) = \vec{0}}$

Beweis:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\boxed{\text{Wirbelfelder sind stets quellenfrei}}$ $\qquad \boxed{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0}$

Beweis:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) = 0$$