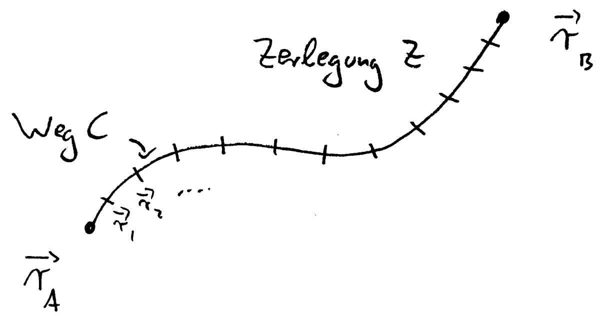
5.3 Linien-, Flächen- und Volumenintegrale

jetzt: Kurvenintegral (auch Linienintegral) über das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ entlang des Weges C von $\vec{r}_a$ bis $\vec{r}_b$

$$\boxed{\int_{\vec{r}_A,\, C}^{\vec{r}_B} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} := \lim_{Z \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i}$$



$$\Delta \vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}$$

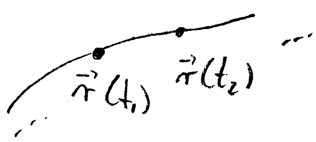
Berechnung von Kurvenintegralen

Falls die Kurve C in Parameterdarstellung vorliegt d.h.

$$C \mathrel{\hat{=}} \vec{r}(t)$$

schreibe: $$\vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i = \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t_i} \Delta t_i$$

mit $\vec{r}_i = \vec{r}(t_i)$



$$\lim_{Z \to \infty} \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t_i} = \frac{d\vec{r}}{dt} \left(= \dot{\vec{r}}(t) \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\vec{r}_A,\, C}^{\vec{r}_B} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\, dt}$$

<u>Beispiel:</u> gegeben $\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2y \\ -9yz \\ 8xz^2 \end{pmatrix}$

gesucht: $\int_{\vec{r}_A, C}^{\vec{r}_B} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ mit $\vec{r}_A = (0,0,0)$

$\vec{r}_B = (1,1,1)$

C: Gerade von $\vec{r}_A$ nach $\vec{r}_B$

Parameterdarstellung der Kurve C:

$\vec{r} = (t,t,t)$ mit $t_A = 0$; $t_B = 1$

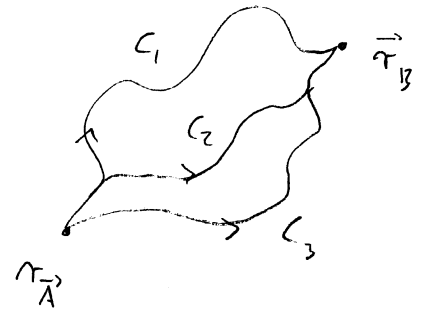
$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = (1,1,1)$

$$\int \ldots = \int_0^1 \underbrace{(3t^2 + 2t, -9t^2, 8t^3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= 8t^3 - 6t^2 + 2t} dt$$

$$= \frac{8}{4} - \frac{6}{3} + 1 = 1$$

<u>Kurvenintegrale über Gradientenfelder</u>

<u>Frage:</u> unter welchen Bedingungen hängt $\int_{\vec{r}_A, C}^{\vec{r}_B} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ nur von $\vec{r}_A, \vec{r}_B$ ab und <u>nicht</u> von der Form des Weges C ?



Behauptung: $\int \vec{A} \cdot d\vec{r}$ ist unabhängig vom Weg, wenn ein skalares Feld Φ existiert mit $\vec{A} = \vec{\nabla}\Phi$

↪ „$\vec{A}$ ist als Gradientenfeld darstellbar"

Beweis:

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} := \lim_{Z\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}\Phi\Big|_{\vec{r}_i} \cdot \Delta\vec{r}_i$$

(siehe 2-6; Änderung von $\varphi(\vec{r})$ in beliebige Richtung)

$$= \lim_{Z\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\Phi(\vec{r}_i + \Delta\vec{r}_i) - \Phi(\vec{r}_i) \right]$$

$$= \lim_{Z\to\infty} \left[-\Phi(\vec{r}_a) + \Phi(\vec{r}_1) - \Phi(\vec{r}_1) + \dots + \Phi(\vec{r}_b) \right]$$

$$= \Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a)$$ unabhängig von der Form des Weges C

merke also
$$\boxed{\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a)}$$

$\Phi(\vec{r})$ heißt Stammfunktion oder **Potential** von $\vec{A}(\vec{r})$

---

es gilt: $\Phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,'$

bilde
$$\underbrace{\Phi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \Phi(\vec{r})}_{= \vec{\nabla}\Phi \cdot \Delta\vec{r}} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}+\Delta\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,' - \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,' = \underbrace{\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\Delta\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,'}_{= \vec{A}(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r}}$$

↑ $\Delta\vec{r} \to 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\Phi = \vec{A}(\vec{r}) \quad ✓$$

einfaches Kriterium für die Wegunabhängigkeit von

$$\int_{\vec{r}_{A,C}}^{\vec{r}_B} \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

$\rightarrow$ $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$ muß erfüllt sein, denn

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\Phi) = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{A}$ als Gradientenfeld darstellbar

---

Beispiele

- geschlossenes Kurvenintegral über Gradientenfelder

betrachte $\oint_C \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ für das Gradientenfeld $\vec{A} = \vec{\nabla}\Phi$

$$\oint \vec{\nabla}\Phi\cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a) \underset{\vec{r}_a = \vec{r}_b}{\uparrow}{=} 0$$

- $\vec{A}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{r}$

$\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$ (siehe letzte Vorlesung)

d.h.
  - $\vec{A}(\vec{r})$ ist wirbelfrei
  - $\vec{A}(\vec{r})$ läßt sich als Gradientenfeld darstellen
  - $\int \vec{A}\cdot d\vec{r}$ ist unabhängig vom Weg

Berechnung des Potentials $\Phi(\vec{r})$ mit $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi$

es gilt: $\Phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,'$

wähle $\vec{r}_a = 0$ $\rightarrow$ $\Phi(\vec{r}) = \int_0^{\vec{r}} f(r')\, \vec{r}\,' \cdot d\vec{r}\,' = \dots$

wähle Parameterdarstellung des Weges C: $\vec{r}\,'(t) = \frac{1}{r}\vec{r}\, t$

$0 \le t \le r$

$$= \int_0^r f(r'(t))\, \underbrace{\vec{r}\,'(t) \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}\,'}{dt}}_{= \vec{r}\,\frac{1}{r}}}_{\frac{\vec{r}^{\,2}}{r^2}\, t \;=\; t} dt$$

$r'(t) = t$

$r'(t) = |\vec{r}\,'(t)|$

$$= \int_0^r f(t)\, t \, dt$$

sei $F(r)$ Stammfunktion zu $f(t)\,t$

$\Rightarrow$ $\Phi(\vec{r}) = F(r)$

<u>check:</u> $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} \end{pmatrix}$

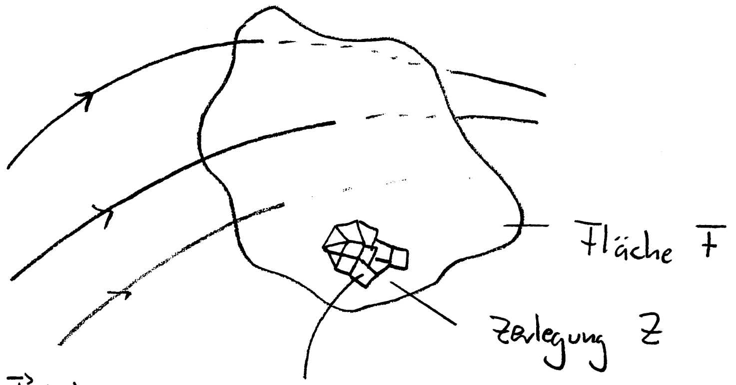
$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = f(r)\cdot r\,\frac{x_i}{r} = f(r)\, x_i$$

$\Rightarrow$ $\vec{A}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{r}$ ✓

Flächenintegrale

Definition: „Flächenintegral", „Fluß"

$$\boxed{\Phi = \int_F \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}(\vec{r}) := \lim_{Z\to\infty} \sum_i \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{f}(\vec{r}_i)}$$

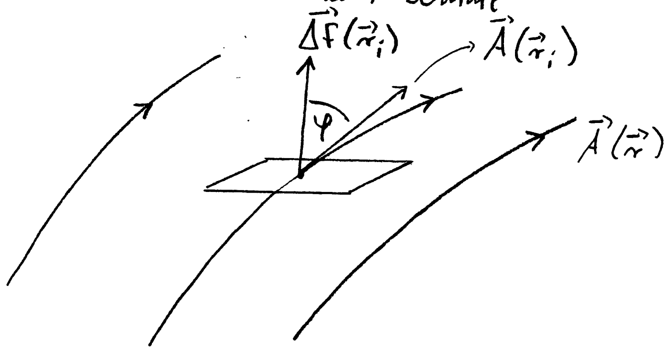


Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

Teilfläche $\Delta\vec{f}(\vec{r}_i)$ am Ort $\vec{r}_i$ der Größe $|\Delta\vec{f}(\vec{r}_i)|$

↳ Vektor ⊥ zur Fläche

einzelne Term der Riemann-Summe

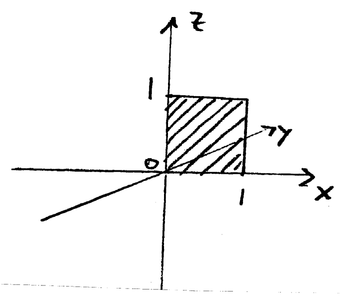


$$\vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{f}(\vec{r}_i) = |\Delta\vec{f}| \cdot \underbrace{|\vec{A}| \cdot \cos\varphi}_{= A_\perp}$$

$= A_\perp$ Komponente des Vektorfeldes ⊥ zum Flächenelement

einfaches Beispiel:

$\vec{A} = \text{const}$ F gegeben durch



$$\Rightarrow \quad \Phi = \int_F \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}(\vec{r}) = \vec{A} \cdot \vec{F} = A_y$$

$$\text{mit} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Achtung: Vorzeichen beliebig

Volumenintegrale

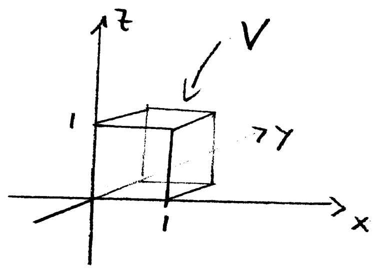
Definition: „Volumenintegral"

$$\boxed{\int_V \varphi(\vec{r})\, dV \equiv \int_V \varphi(\vec{r})\, d^3r := \lim_{Z \to \infty} \sum_i \varphi(\vec{r}_i)\, \Delta V(\vec{r}_i)}$$

---

einfaches Beispiel:

$$\varphi(\vec{r}) = x^2 y \sin(\pi z)$$



$$\Rightarrow \quad \int_V \varphi(\vec{r})\, dV = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \; x^2 y \sin(\pi z)$$

Dreifachintegral!

$$= \underbrace{\int_0^1 x^2 dx}_{= \frac{1}{3}} \; \underbrace{\int_0^1 y\, dy}_{= \frac{1}{2}} \; \underbrace{\int_0^1 \sin(\pi z)\, dz}_{-\frac{1}{\pi}\left[\cos(\pi z)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}} = \frac{1}{3\pi}$$

einfache Begrenzungsflächen:

$$0 \le x \le 1 \qquad 0 \le y \le 1 \qquad 0 \le z \le 1$$