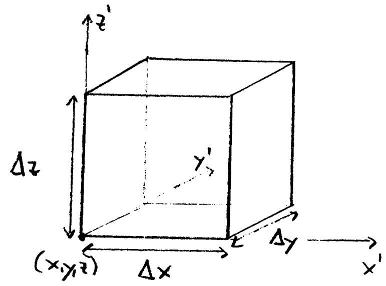
5.4 Integralstze (Gauss, Stokes)

$\rightarrow$ Gauß'scher Satz, Stokes'scher Satz: Verknüpfung von Linien-, Flächen- und Volumenintegralen

a) Gauß'scher Satz

gegeben: Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$, „kleines" Volumen ΔV mit geschlossener Oberfläche ΔF

wähle ΔV als Quader:



$\rightarrow$ berechne das Flächenintegral $\oint_{\Delta F} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}$ = Summe aus sechs Teilflächen

Vorderseite: $$\int_1 \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = \int_x^{x+\Delta x} \int_z^{z+\Delta z} \vec{A}(x',y,z') \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -dx'\,dz' \\ 0 \end{pmatrix} = -\int_x^{x+\Delta x} dx' \int_z^{z+\Delta z} dz'\, A_y(x',y,z')$$

Hinterseite: $$\int_2 \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = +\int_x^{x+\Delta x} \int_z^{z+\Delta z} A_y(x',y+\Delta y,z')$$

bilde $$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \left[\int_1 \ldots + \int_2 \ldots \right] =$$

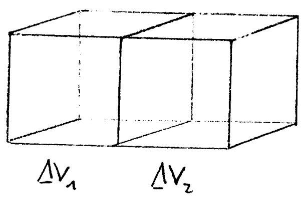
$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta x \, \Delta z} \int_x^{x+\Delta x} dx' \int_z^{z+\Delta z} dz' \underbrace{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \left[A_y(x',y+\Delta y,z') - A_y(x',y,z') \right]}_{= \frac{\partial A_y}{\partial y}(x',y,z')}}_{\rightarrow \ \Delta x\, \Delta z \, \frac{\partial A_y}{\partial y}(x,y,z)} =$$

$$= \frac{\partial A_y}{\partial y} \ ;$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} \vec{A} \cdot d\vec{f} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}$$

$\rightarrow$ Integraldarstellung der Divergenz

jetzt: Zusammensetzen von $\Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots$



Gesamtvolumen $\Delta V_{12} = \Delta V_1 + \Delta V_2$,

Oberfläche ΔF_{12}, Grenzfläche F_G

$$\rightarrow \oint_{\Delta F_{12}} \vec{A}\cdot d\vec{f} = \oint_{\Delta F_1} \vec{A}\cdot d\vec{f} + \oint_{\Delta F_2} \vec{A}\cdot d\vec{f} = \ldots$$

denn: die Terme $\int_{F_6} \vec{A}\cdot d\vec{f}$ in diesen beiden Flächenintegralen heben sich auf

$$\ldots \cong \sum_{i=1}^{2} \Delta V_i \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)\Big|_{\vec{r}_i}$$

jetzt: $V = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i \quad \longrightarrow \quad \oint_{F_V} \vec{A}\cdot d\vec{f} \cong \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)\Big|_{\vec{r}_i}$

im Limes $N \to \infty$ $(\Delta V_i \to 0)$ folgt schließlich der Gauß'sche Satz:

$$\boxed{\oint_{F_V} \vec{A}\cdot d\vec{f} = \int_V dV\, \vec{\nabla}\cdot\vec{A}}$$

Beispiele:

- $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 3$

  $\Rightarrow \oint_{F_V} \vec{r}\cdot d\vec{f} = 3\int_V dV = 3V$ unabhängig von der Form des Volumens

- $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r})$

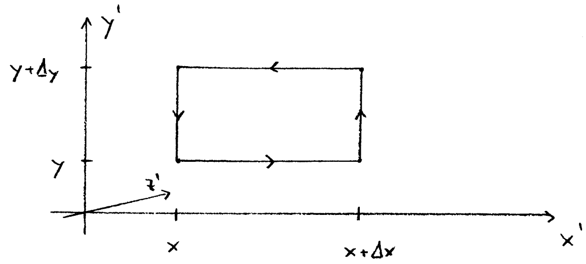
  $\Rightarrow \oint_{F_V} \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{f} = \int_V dV\, \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r})\right]}_{=0} = 0$

  d.h.: der Fluß eines Wirbelfelds durch eine geschlossene Fläche verschwindet

b) Stokes'scher Satz

gegeben: Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$, „kleine" Fläche ΔF mit geschlossener Randlinie $C_{\Delta F}$

wähle ΔF als Rechteck:



$\longrightarrow$ berechne das Linienintegral $\oint_{C_{\Delta F}} \vec{A}\cdot d\vec{r}$ = Summe aus vier Linienintegralen

$$\oint_{C_{\Delta F}} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_x^{x+\Delta x} A_x(x',y,z)\,dx' - \int_x^{x+\Delta x} A_x(x',y+\Delta y,z)\,dx'$$
$$+ \int_y^{y+\Delta y} A_y(x+\Delta x,y',z)\,dy' - \int_y^{y+\Delta y} A_y(x,y',z)\,dy'$$

bilde: $$\lim_{\Delta F\to 0}\frac{1}{\Delta F}\oint_{C_{\Delta F}}\vec{A}\cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\underbrace{\int_{x}^{x+\Delta x} dx' \underbrace{\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\left[A_x(x',y,z) - A_x(x',y+\Delta y,z)\right]}_{= -\frac{\partial A_x}{\partial y}(x',y,z)}}_{\to\ -\Delta x\,\frac{\partial A_x}{\partial y}(x,y,z)}$$

$$+ \ (\text{Terme mit } A_y) =$$

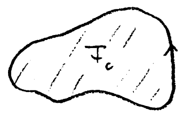
$$= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = (\vec{\nabla}\times\vec{A})_z$$ → führt auf Integraldarstellung der Rotation

$$\longrightarrow \quad \oint_{C_{\Delta F}}\vec{A}\cdot d\vec{r} \cong \Delta F\,(\vec{\nabla}\times\vec{A})_z \overset{!}{=} \Delta\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

Zusammensetzen von $\Delta F_1 + \Delta F_2 + \dots$ führt auf $\displaystyle\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{N}\Delta\vec{F}_i\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})\Big|_{\vec{r}=\vec{r}_i}$

im Limes $N\to\infty$ ($\Delta F_i \to 0$) folgt schließlich der

Stokes'sche Satz $$\boxed{\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{F_c}\operatorname{rot}\vec{A}\cdot d\vec{F}}$$



Weg C

c) partielle Integration

sei $f(\vec{r})$ ein skalares Feld, $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld

$$\longrightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\left(f(\vec{r})\,\vec{A}(\vec{r})\right) = f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}f$$ (siehe Vorl. MM).

auf beiden Seiten: $\int_V dV \dots$

$$\underbrace{\int dV\,\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A})}_{= \oint_{F_V} f\vec{A}\cdot d\vec{f}} = \int dV\left[f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}f\right]$$

speziell für $f = \phi$, $\vec{A} = \vec{\nabla}\phi$

$$\longrightarrow \quad \oint_{F_V}\phi\,\vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{f} = \int dV\Big[\phi\,\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi)}_{=\Delta\phi} + \underbrace{\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\phi}_{=|\vec{\nabla}\phi|^2}\Big]$$

Abschätzung des Oberflächenintegrals für :

$$\Phi \sim \frac{1}{r} \longrightarrow |\vec{\nabla}\Phi| \sim \frac{1}{r^2} \Rightarrow \Phi\,|\vec{\nabla}\Phi| \sim \frac{1}{r^3}$$

F_V : Oberfläche einer Kugel mit Radius R

$$\Rightarrow \oint_{F_V} \Phi \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{df} \sim \frac{1}{R^3} \cdot R^2 = \frac{1}{R} \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \oint_{F_V} \Phi \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{df} = 0$$

in diesem Fall gilt also :

$$\boxed{\int dV\, \Phi\, \Delta\Phi = -\int dV\, |\vec{\nabla}\Phi|^2}$$