Mathematische Methoden – WS 2011/12

Blatt 11

## Aufgabe 1 : Rotation

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} axy - z^3 \\ (a-2)x^2 \\ (1-a)xz^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} axy - z^3 \\ (a-2)x^2 \\ (1-a)xz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3z^2 - (1-a)z^2 \\ 2(a-2)x - ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z^2(a-4) \\ x(a-4) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$ für $a = 4$, d.h. für $a = 4$ ist das Vektorfeld $\vec{A}$ wirbelfrei

## Aufgabe 2 : Berechnung von Linienintegralen

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x + y \\ z - xy \\ z \end{pmatrix}$$

a) $\Delta A_1 = \int_{\vec{a}, C_1}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ , $\vec{a} = (0,0,0)$ , $\vec{b} = (1,1,1)$

es gilt : $\int_{\vec{a}, C}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \, dt$

$C_1$ : $\vec{r}(t) = (t, t, t)$ , $t_a = 0$, $t_b = 1$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = (1,1,1)$ , $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 2t \\ t - t^2 \\ t \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ setze $x = t$, $y = t$, $z = t$

$$\Rightarrow \Delta A_i = \int_0^1 (2t + t - t^2 + t) \, dt = \frac{5}{3}$$

$C_2$ : $\vec{r}(t) = (t^2, -t + 2t^2, t)$ , $t_a = 0$, $t_b = 1$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (2t,\, 4t-1,\, 1) \quad ; \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 3t^2 - t \\ t + t^3 - 2t^4 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta A_2 = \int_0^1 (2t^2 + 5t^3 + 6t^4 - 8t^5)\, dt = \frac{107}{60}$$

$C_3$ : $\vec{r}(t) = (t, t, a + be^t)$ , $t_a = 0$ , $t_b = 1$

aus $\vec{r}(0) = \vec{a}$ folgt : $(0, 0, a+b) = (0,0,0) \rightarrow a + b = 0$

aus $\vec{r}(1) = \vec{b}$ folgt : $(1, 1, a+be) = (1,1,1) \rightarrow a + be = 1$

$\Rightarrow a = \frac{1}{1-e}$ , $b = \frac{-1}{1-e}$ und $\vec{r}(t) = \left(t, t, \frac{1-e^t}{1-e}\right)$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(1, 1, -\frac{e^t}{1-e}\right) \quad ; \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 2t \\ \frac{1}{1-e}(1-e^t) - t^2 \\ \frac{1}{1-e}(1-e^t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta A_3 = \int_0^1 \left(2t + \frac{1}{1-e}(1-e^t) - t^2 - \frac{e^t}{(1-e)^2}(1-e^t)\right) dt = \ldots$$

$$\ldots = \frac{13}{6} + \frac{1}{1-e}$$

b)
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x + y \\ z - xy \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -y-1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

notwendiges Kriterium für die Wegunabhängigkeit von $\Delta A$ : $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$

## Aufgabe 3: Potential eines Vektorfelds

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 \\ 3xz^2 \end{pmatrix}$$

a, $$\int_{\vec{a},C_1}^{\vec{b}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \ldots$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{A}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 2t^2 + t^3 \\ t^2 \\ 3t^3 \end{pmatrix}$$

$$\ldots = \int_0^1 (3t^2 + 4t^3)\, dt = 2$$

b, $$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 \\ 3xz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3z^2 - 3z^2 \\ 2x - 2x \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \int_{\vec{a},C}^{\vec{b}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ unabhängig vom Verlauf des Wegs $C$

c, Potential $\Phi(\vec{r})$ des Vektorfelds $\vec{A}(\vec{r})$ :

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,'$$

setze $\vec{r}_a = \vec{0}$ und wähle eine einfache Parametrisierung des Wegs von $\vec{0}$ nach $\vec{r}$

$\rightarrow \vec{r}\,'(t) = t\,\vec{r} \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{A}(\vec{r}\,'(t)) = \begin{pmatrix} 2xyt^2 + z^3t^3 \\ x^2t^2 \\ 3xz^2t^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r}) = \int_0^1 (2x^2yt^2 + xz^3t^3 + yx^2t^2 + 3xz^3t^3)\, dt$$

$$= \int_0^1 (3x^2yt^2 + 4xz^3t^3)\, dt = x^2y + xz^3$$

d, $$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a}) = 2 - 0 = 2$$ (siehe auch Teilaufgabe a,)

$\uparrow$ $\vec{b} = (1,1,1)$ , $\vec{a} = (0,0,0)$