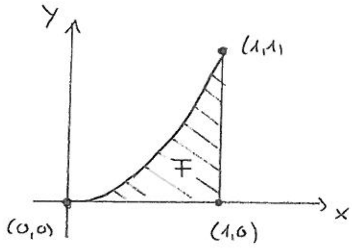
Mathematische Methoden WS 2011/12

Blatt 12

Aufgabe 1: Doppelintegrale

a) $\int_F f(x,y)\, dx\, dy = \ldots \qquad f(x,y) = 1$



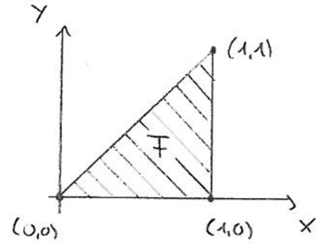
$$\ldots = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy = \ldots$$

$y_1(x) = 0\ , \quad y_2(x) = x^2$

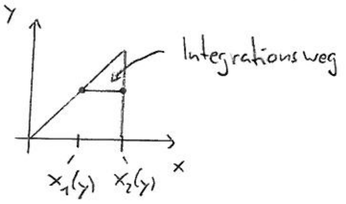
$$= \underbrace{\int_0^1 x^2\, dx}_{= \text{Fläche unter der Kurve } y = x^2} = \frac{1}{3}$$

für $f = 1$ ergibt $\int_F dx\,dy$ den Flächeninhalt von F

b) $\int_F f(x,y)\, dx\, dy \qquad$ mit $\quad f(x,y) = x^2 y$



i) $$\int_F f(x,y)\, dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\, dx = \ldots$$



$x_1(y) = y$

$x_2(y) = 1$

$$\ldots = \int_0^1 dy \int_y^1 x^2 y\, dx = \int_0^1 dy\, y\, \frac{1}{3}\left[x^3\right]_y^1 = \frac{1}{3}\int_0^1 dy\, y(1-y^3) =$$

$$= \frac{1}{3}\underbrace{\int_0^1 y\, dy}_{=\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\underbrace{\int_0^1 y^4\, dy}_{=\frac{1}{5}} = \frac{1}{10}$$

ii) $$\int_F f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 y\, dy =$$

$$= \int_0^1 dx\, x^2\, \frac{1}{2}\left[y^2\right]_0^x = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\, x^4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

Aufgabe 2 : elektrisches Feld einer homogen geladenen Hohlkugel

Ladungsdichte
$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \le r < R_i \\ \rho_0 & : \quad R_i \le r < R_a \\ 0 & : \quad r \ge R_a \end{cases} \qquad \text{mit} \quad r = |\vec{r}|$$

a) Volumen der Hohlkugel : $V = \frac{4}{3}\pi\left(R_a^3 - R_i^3\right)$

$\rho_0 = \frac{Q}{V}$ => Gesamtladung der Hohlkugel $Q = \rho_0 V = \frac{4}{3}\pi\left(R_a^3 - R_i^3\right)\rho_0$

b) Gauß'sche Satz :

$$\oint_{F_V} \vec{E}\cdot d\vec{f} = \int_V dV \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{=4\pi\rho(r')}$$

V : Volumen einer Kugel mit Radius r um $\vec{O}$

linke Seite : es gilt (siehe Vorlesung) $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\vec{e}_r$

$\rightarrow$ auf der Fläche F_V gilt : $E(r) = \text{const}$ und $d\vec{f} = \vec{e}_r\, df$

$$\Rightarrow \oint_{F_V} \vec{E}\cdot d\vec{f} = E(r)\oint_{F_V} \underbrace{\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r}_{=1}\, df = E(r)\underbrace{\oint_{F_V} df}_{=F_V} = E(r)\, 4\pi r^2$$

rechte Seite :

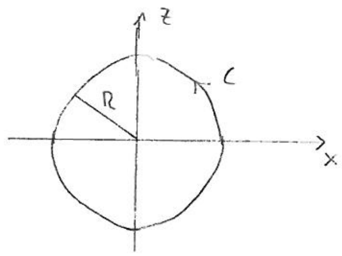
$$4\pi\int_V dV\, \rho(r') = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \le r < R_i \\ 4\pi\, \frac{4}{3}\pi\rho_0\left(r^3 - R_i^3\right) & : \quad R_i \le r < R_a \\ 4\pi\, Q & : \quad r \ge R_a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E(r) = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \le r < R_i \\ \frac{4}{3}\pi\rho_0\left(r - \frac{R_i^3}{r^2}\right) & : \quad R_i \le r < R_a \\ \frac{Q}{r^2} & : \quad r \ge R_a \end{cases}$$

Aufgabe 3 : Stokes'scher Satz

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{b}{2}\begin{pmatrix}z\\0\\-x\end{pmatrix}$$

gesucht: $\oint\limits_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$ mit C :



a) Parametrisierung des Integrationswegs:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}\cos(2\pi t)\\0\\\sin(2\pi t)\end{pmatrix}\cdot R \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

$$\rightarrow \oint\limits_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 dt\, \vec{A}(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t) = \int_0^1 dt\, \frac{b}{2}\, \underbrace{\begin{pmatrix}R\sin(2\pi t)\\0\\-R\cos(2\pi t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\pi R\sin(2\pi t)\\0\\2\pi R\cos(2\pi t)\end{pmatrix}}_{=-2\pi R^2} =$$

$$= -b\pi R^2$$

↑ Vorzeichen hängt vom gewählten Umlaufssinn ab.

b) Stokes'scher Satz $\oint\limits_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{F_c} (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{f} = \dots$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{b}{2}\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\\partial/\partial y\\\partial/\partial z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}z\\0\\-x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}$$ konstant auf der Integrationsfläche

$$\dots = \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot \underbrace{\int\limits_{F_c} d\vec{f}}_{=\vec{F}_c = R^2\pi\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}} = R^2\pi\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = -b\pi R^2 \quad \checkmark$$