Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2011/2012

Blatt 12: Abgabetermin 24.01.2012 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Doppelintegrale

a) Berechnen Sie das Doppelintegral der Funktion $f(x,y) = 1$ über die von den Linien $(0,0) - (1,0)$, $(1,0) - (1,1)$ und $y = x^2$ eingeschlossene Fläche. Interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Integrieren Sie die Funktion $f(x,y) = x^2 y$ über das Dreieck $(0,0) - (1,0) - (1,1)$. Führen Sie die beiden möglichen Rechenwege durch, d.h. Integration zuerst über x und dann über y, bzw. umgekehrt. (4 Punkte)

Aufgabe 2: elektrisches Feld einer homogen geladenen Hohlkugel

Gegeben sei die Ladungsdichte einer homogen geladenen Hohlkugel (innerer Radius R_i, äußerer Radius R_a)

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \le r < R_\mathrm{i} \\ \rho_0 & : \quad R_\mathrm{i} \le r < R_\mathrm{a} \\ 0 & : \quad r \ge R_\mathrm{a} \end{cases} \quad ,$$

die Ladungsdichte hängt also nur von $r = |\vec{r}|$ ab.

a) Berechnen Sie die Gesamtladung der Hohlkugel.

b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ für $0 \le r < \infty$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes. Hinweis: Wählen Sie für die dabei auftretenden Integrale das Volumen bzw. die Oberfläche einer Kugel um $\vec{r} = \vec{0}$. (4 Punkte)

Aufgabe 3: Stokes'scher Satz

Gegeben sei ein Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{b} \times \vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \; .$$

Berechnen Sie das Linienintegral $\oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ über die Kreislinie in der x-z-Ebene mit Zentrum der Kreisfläche bei $(0,0,0)$ und Radius R, und zwar

a) durch explizite Berechnung des Linienintegrals und ...

b) ... unter Verwendung des Stokes'schen Satzes durch die Berechnung des entsprechenden Flächenintegrals. Hinweis: Die Auswertung der Flächenintegrals wird dadurch vereinfacht, dass $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ auf der Integrationsfläche konstant ist. (3 Punkte)