Mathematische Methoden – WS 2011/12

Blatt 3

Aufgabe 1: Taylor-Reihe

a) $f(x) = x \sin(x)$

es gilt (siehe Vorlesung): $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

$$\Rightarrow \quad x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\text{mit} \quad a_n = \begin{cases} 0 & : n = 0 \\ (-1)^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{(n-1)!} & : n > 0 \text{ und } n \text{ gerade} \\ 0 & : n \text{ ungerade} \end{cases}$$

b) $\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \dots$

$$\Rightarrow \quad \cos x + \sin x = 1 + x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\text{mit} \quad a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{n!} & : n \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n!} & : n \text{ ungerade} \end{cases}$$

c) $f(x) = \ln(x) = f^{(0)}(x)$, $x_0 = 1 \rightarrow f^{(0)}(x_0) = \ln(1) = 0$

$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x}$, $f^{(2)}(x) = -1 \cdot x^{-2}$, $f^{(3)}(x) = (-1) \cdot (-2) x^{-3}$

$$\rightarrow \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} (n-1)! \, x^{-n}$$

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} (n-1)!$$

$$\Rightarrow \quad \ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(1) (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \underbrace{\frac{(n-1)!}{n!}}_{= \frac{1}{n}} (x-1)^n =$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{3} (x-1)^3 - \dots$$

Aufgabe 2 : bestimmtes und unbestimmtes Integral

a, $$\int_0^{\ln 2} \sinh x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} (e^x - e^{-x}) \, dx = \frac{1}{2} \left[e^x + e^{-x} \right]_0^{\ln 2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{2} - (1+1) \right) = \frac{1}{4}$$

b, $$\frac{\sqrt{x}}{x^3} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-3} = x^{-5/2}$$

$$\rightarrow \int_1^2 x^{-5/2} \, dx = -\frac{2}{3} \left[x^{-\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

c, $$a^x = e^{x \ln a}$$

$$\int_0^{1/\ln a} e^{x \ln a} \, dx = \frac{1}{\ln a} \left[e^{x \ln a} \right]_0^{1/\ln a} = \frac{1}{\ln a} (e - 1)$$

d, $$\int_1^a x^m \ln(x) \, dx = \ldots$$

$$f_1(x) = x^m \qquad f_2(x) = \ln x$$

$$F_1(x) = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \qquad f_2'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\ldots = \left[\frac{1}{m+1} x^{m+1} \ln x \right]_1^a - \frac{1}{m+1} \int_1^a x^{m+1} \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{1}{m+1} a^{m+1} \ln a - \frac{1}{(m+1)^2} \left(a^{m+1} - 1 \right)$$

e, $$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \ldots$$ Substitution: $x = a \sin(\alpha)$, $\alpha = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

$$\int_0^a \ldots \sim \int_0^{\pi/2} \ldots , \qquad \frac{dx}{d\alpha} = a \cos(\alpha)$$

$$\ldots = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\alpha} \; a \cos\alpha \, d\alpha = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\alpha \, d\alpha = \frac{1}{4} \pi a^2$$

f, $$f(x) = \sum_{n=0}^{m} (n+1)! \, x^n$$

$$\rightarrow \text{Stammfunktion } F(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{(n+1)!}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{m} n! \, x^{n+1}$$

Aufgabe 3: uneigentliches Integral

a, $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A$

$= \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{A} + 1\right) = 1$

b, $\int_0^2 \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \ldots$ Substitution: $u = x^2 - 1 \qquad du = 2x\,dx$

$\int_0^2 \sim \int_{-1}^3$

$\ldots = \int_{-1}^3 \frac{1}{u}\,du = \underbrace{\lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{u}\,du}_{= \int_1^{\varepsilon_1} \frac{1}{v}\,dv} + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{\varepsilon_2}^3 \frac{1}{u}\,du$

$= \lim_{\varepsilon_1\to 0} [\ln\varepsilon_1 - \ln 1] + \lim_{\varepsilon_2\to 0} [\ln 3 - \ln\varepsilon_2]$

d.h.: uneigentliche Integral existiert nicht → die Grenzwerte können nicht unabhängig voneinander durchgeführt werden

es existiert aber das Hauptwertintegral

$⨍_0^2 \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} (\ln\varepsilon + \ln 3 - \ln\varepsilon) = \ln 3$