Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2011/2012

Blatt 4: Abgabetermin 08.11.2011 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Integralfunktionen

a) Die Gamma-Funktion ist definiert als

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \ .$$

Zeigen Sie durch partielle Integration, dass $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. (2 Punkte)

b) Die Fehlerfunktion ist definiert als

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \ .$$

Zeigen Sie durch partielle Integration, dass sich das Integral

$$\int_0^x y^2 e^{-y^2}\,\mathrm{d}y \ ,$$

auf die Fehlerfunktion zurückführen lässt. Hinweis: $F(y) = e^{-y^2}$ ist die Stammfunktion zu $f(y) = ?$

Aufgabe 2: komplexe Zahlen: Multiplikation

Die komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3 sind gegeben durch

$$z_1 = 1 + i \quad , \quad z_2 = -2 + 2i \quad , \quad z_3 = -i \ .$$

Berechnen Sie die komplexen Zahlen

a) $p_j = i z_j$ $(j = 1, 2, 3)$ und

b) $q_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) z_j$ $(j = 1, 2, 3)$ (3 Punkte),

und zeichnen Sie die z_j, p_j und q_j in der komplexen Ebene. Welche anschauliche Bedeutung ergibt sich daraus für die Multiplikation der z_j mit i bzw. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$?

Aufgabe 3: komplexe Zahlen: $e^{i\varphi}$

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

a) $2e^{-i\pi/4}$, b) $ie^{\pi i}$ (1 Punkt), c) $e^{n\pi i}$ $(n \in Z)$ (1 Punkt)

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = re^{i\varphi}$:

d) $2 - 2i$, e) $(-1)^n$ $(n \in Z)$ (1 Punkt), f) $(1 + i)^n$ $(n \in Z)$ (1 Punkt)

Aufgabe 4: komplexe Zahlen: Division

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

a)

$$\frac{1}{1-i} \; ,$$

b)

$$\frac{1+i}{(2-i)^2} \; ,$$

(1 Punkt)

c)

$$\frac{i-2}{2+e^{i\pi/4}} \; .$$

(1 Punkt)