Mathematische Methoden – WS 2011/12

Blatt 5

Aufgabe 1: Additionstheorem

$$e^{3i\varphi} = e^{i\varphi} e^{i\varphi} e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i\,(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi)$$

$$\sin(3\varphi) = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$$

Aufgabe 2: Wege in der komplexen Zahlenebene

a) $\gamma_1 : z_1(t) = t + it \,, \quad 0 \leq t \leq 2$

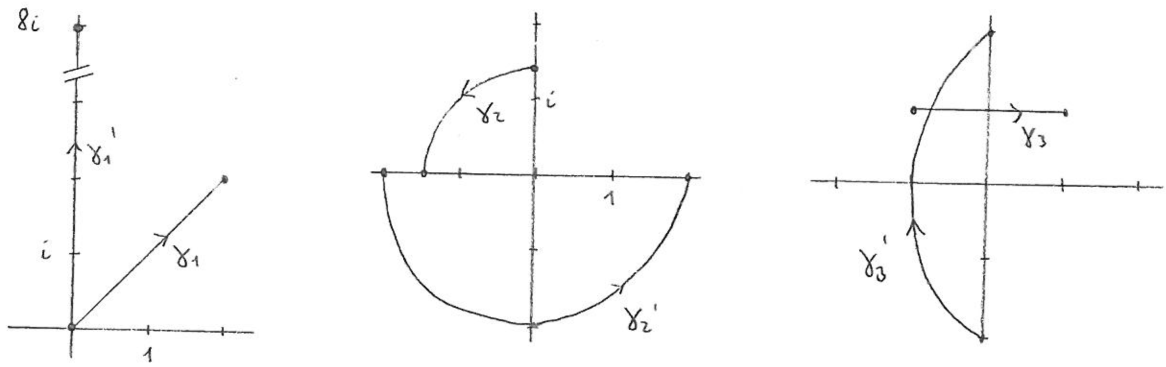
$$z_1^2(t) = (t+it)^2 = 2it^2$$

b) $\gamma_2 : z_2(t) = \sqrt{2}\, e^{i(t+\pi/2)} \,, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

$$z_2^2(t) = 2\,e^{i(2t+\pi)}$$

c) $\gamma_3 : z_3(t) = t + i \,, \quad -1 \leq t \leq 1$

$$z_3^2(t) = (t+i)^2 = t^2 - 1 + 2it$$



Aufgabe 3: Komplexwertige Funktionen: sin (z)

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

a) $\gamma_1 : z_1(t) = t \quad \rightarrow \quad \sin(z_1(t)) = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) = \sin t$ (rein reell)

b) $\gamma_2 : z_2(t) = it \quad \rightarrow \quad \sin(z_2(t)) = \frac{1}{2i}\left(e^{-t} - e^{t}\right)$

$$= \frac{1}{2} i \left(e^{t} - e^{-t}\right) = i \sinh t \quad \text{(rein imaginär)}$$

c) $\gamma_3 : z_3(t) = t + i \quad \rightarrow \quad \sin(z_3(t)) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(t+i)} - e^{-i(t+i)}\right) =$

$$= -\frac{i}{2}\left(e^{-1}e^{it} - e^{1}e^{-it}\right) = -\frac{i}{2}\left(\frac{1}{e}(\cos t + i \sin t) - e(\cos t - i \sin t)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin t\left(\frac{1}{e} + e\right) - \frac{i}{2}\cos t\left(\frac{1}{e} - e\right)$$

Aufgabe 4: Klassifizierung von Differentialgleichungen

I: $\frac{d^2 f}{dx^2} + t\frac{df}{dx} + 2 = 0$: gew, lin, n-h, konst, 2te Ordnung

II: $\frac{\partial f}{\partial t} + f(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} = 0$: partiell, n-l, hom, –, 1te Ordnung

III: $\frac{d^3 x}{dt^3} + t^4\frac{dx}{dt} - x(t) = 0$: gew, lin, hom, n-k, 3te Ordnung

IV: $(f(x))^4 + x\frac{df}{dx} = 0$: gew, n-l, hom, n-k, 1te Ordnung

Aufgabe 5: Differentialgleichungen, Linearkombinationen

I: $a\,g_1(x) + b\,h_1(x) + a\,g_1''(x) + b\,h_1''(x) = 1$

$$a\underbrace{\left(g_1(x) + g_1''(x)\right)}_{=1} + b\underbrace{\left(h_1(x) + h_1''(x)\right)}_{=1} = 1$$

nur erfüllt, falls $a + b = 1$

II: $\left(a\,g_2(x) + b\,h_2(x)\right)^2 + a\,g_2''(x) + b\,h_2''(x) = 0$

$$a^2(g_2(x))^2 + a\,g_2''(x) + b^2(h_2(x))^2 + b\,h_2''(x) + 2ab\,g_2(x)\,h_2(x) = 0$$

→ lässt sich nicht vereinfachen

Für $a = b = 1$: $g_2(x)\,h_2(x) = 0$ auch i.A. nicht erfüllt