Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2011/2012

Blatt 5: Abgabetermin 15.11.2011 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Additionstheorem

Stellen Sie mit Hilfe der Eulerschen Gleichung $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ein Additionstheorem für $\sin(3\varphi)$ auf, d.h. stellen Sie $\sin(3\varphi)$ durch Kombinationen aus $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ dar. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Wege in der komplexen Zahlenebene

Wie transformieren sich die Wege

a) γ_1: $z_1(t) = t + it$, $0 \le t \le 2$,

b) γ_2: $z_2(t) = \sqrt{2}\, e^{i(t+\pi/2)}$, $0 \le t \le \pi/2$, (2 Punkte)

c) γ_3: $z_3(t) = t + i$, $-1 \le t \le 1$, (2 Punkte)

unter der Abbildung $z \to z^2$? Zeichnen Sie die Wege γ_i $(i = 1, 2, 3)$ und die transformierten Wege in der komplexen Ebene.

Aufgabe 3: komplexwertige Funktionen: $\sin(z)$

Die Funktion $\sin(z)$ ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert als

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \ .$$

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\sin(z)$ entlang der Wege

a) γ_1: $z_1(t) = t$, $-\infty \le t \le \infty$ (entlang der reellen Achse),

b) γ_2: $z_2(t) = it$, $-\infty \le t \le \infty$ (entlang der imaginären Achse),

c) γ_3: $z_3(t) = t + i$, $-\infty \le t \le \infty$ (2 Punkte).

Aufgabe 4: Klassifizierung von Differentialgleichungen

Gegeben sind folgende Differentialgleichungen:

$$\mathrm{I}: \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + t\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + 2 = 0 \quad , \qquad \mathrm{II}: \quad \frac{\partial f}{\partial t} + f(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad ,$$

$$\mathrm{III}: \quad \frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3} + t^4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x(t) = 0 \quad , \qquad \mathrm{IV}: \quad (f(x))^4 + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}x = 0 \quad .$$

Klassifizieren Sie diese Differentialgleichungen nach folgenden Kriterien:

- gewöhnlich/partiell,
- linear/nicht-linear,
- homogen/nicht homogen,
- konstante/nicht-konstante Koeffizienten.

Von welcher Ordnung sind die Differentialgleichungen jeweils? (Dgl. III und IV je 1 Punkt.)

Aufgabe 5: Differentialgleichungen: Linearkombinationen

Betrachten Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\mathrm{I}: \quad f_1(x) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f_1(x) = 1 \ ,$$

$$\mathrm{II}: \quad (f_2(x))^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f_2(x) = 0 \ . \quad \text{(2 Punkte)}$$

Die Funktionen $g_i(x)$ und $h_i(x)$ sind jeweils Lösungen dieser Differentialgleichungen (Hinweis: Diese Lösungen sollen nicht bestimmt werden). Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die Linearkombinationen $ag_i(x) + bh_i(x)$ im allgemeinen keine Lösungen dieser Differentialgleichungen sind.