Mathematische Methoden — WS 2011/12

Blatt 6

Aufgabe 1: Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$4 \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} - 2x(t) = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

a) $x(t) = A e^{\alpha t}$

b) $4\alpha^2 + 2\alpha - 2 = 0$

c) $\alpha_1 = 1/2 \;,\; \alpha_2 = -1$

d) allgemeine Lösung: $x(t) = a_1 e^{t/2} + a_2 e^{-t}$

e) Anfangsbedingungen: $x(0) = 0$

$\dot{x}(0) = 1 \quad \longrightarrow \quad \dot{x}(t) = \frac{a_1}{2} e^{t/2} - a_2 e^{-t}$

$\Rightarrow$ I $\quad a_1 + a_2 = 0 \quad ; \quad a_2 = -a_1$

II $\quad \frac{a_1}{2} - a_2 = 1 \quad \hookleftarrow$ Einsetzen $\Rightarrow \quad \frac{a_1}{2} + a_1 = 1 \;,\; a_1 = \frac{2}{3}$

damit folgt: $x(t) = \frac{2}{3} e^{t/2} - \frac{2}{3} e^{-t}$

f) jetzt: inhomogene Dgl. $\quad 4 \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} - 2x(t) = a e^{\omega t} \qquad (\mathrm{II})$

Ansatz: $x(t) = x_0 e^{\omega t}$

$\Rightarrow \quad 4\omega^2 x_0 + 2\omega x_0 - 2x_0 = a \quad , \quad x_0 = \frac{a}{4\omega^2 + 2\omega - 2}$

die spezielle Lösung de. inhomogenen Dgl. lautet

$$x_s(t) = \frac{a}{4\omega^2 + 2\omega - 2} e^{\omega t}$$

g) allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. (II) = spezielle Lösung $x_s(t)$ + allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Dgl (I).

$$x(t) = x_s(t) + a_1 e^{t/2} + a_2 e^{-t}$$

Aufgabe 2: Differentialgleichung mit nicht-konstanten Koeffizienten

$$y'(x) - 2x\,y(x) = 0$$

a, $\frac{dy}{dx} = 2x\,y \quad , \quad \frac{1}{y}\,dy = 2x\,dx$

$$\ln(y) = x^2 + c \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^{x^2+c} = \underbrace{e^c}_{=a} e^{x^2} = a e^{x^2}$$

b, $y(1) = a e^1 = a e \overset{!}{=} 1$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{e} \quad \text{und} \quad y(x) = \frac{1}{e} e^{x^2} = e^{x^2-1}$$

Aufgabe 3: inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} + b\,x(t) = a e^{-\lambda t} \quad (1) \qquad a, b, \lambda \text{ gegeben}$$

die zugehörige homogene Dgl. $\frac{dx}{dt} + b\,x(t) = 0$ hat die allgemeine Lösung: $x_h(t) = c\,e^{-bt}$

a, Ansatz für Dgl. (1): $x_s(t) = c(t)\,e^{-bt} \quad \rightarrow \quad x_s'(t) = c'(t)e^{-bt} - b\,c(t)e^{-bt}$

$$= e^{-bt}\left(c'(t) - b\,c(t)\right)$$

Einsetzen in Dgl. (1)

$$e^{-bt}\left(c'(t) - b\,c(t) + b\,c(t)\right) = a e^{-\lambda t}$$

$$\rightarrow \quad c'(t) = a e^{(b-\lambda)t} \quad \text{damit folgt:} \quad c(t) = \frac{a}{b-\lambda} e^{(b-\lambda)t} + d$$

und für die spezielle Lösung der inhomogenen Dgl:

$$x_s(t) = \frac{a}{b-\lambda} e^{-\lambda t} + d\,e^{-bt}$$

b, allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl (1):

$$x(t) = x_s(t) + x_h(t) = \frac{a}{b-\lambda} e^{-\lambda t} + \underbrace{(d+c)}_{\text{zusammenfassen zu einer Konstanten } c'} e^{-bt}$$

c) Randbedingung $x(0) = 0$

$$\rightarrow \quad \frac{a}{b-1} + c' = 0 \quad \rightarrow \quad c' = -\frac{a}{b-1}$$

und damit $$x(t) = \frac{a}{b-1}\left(e^{-1t} - e^{-bt}\right)$$

Aufgabe 4: Differentialgleichungen: Potenzreihenansatz

$$x^2 f''(x) - 6f(x) = 0$$

Ansatz: $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \rightarrow \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n\, n\cdot(n-1)\, x^{n-2}$$

Einsetzen in die Dgl:

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_n\, n\cdot(n-1)\, x^n - 6\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{} = 0$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{mit} \quad a_n = \begin{cases} -6c_0 & : n=0 \\ -6c_1 & : n=1 \\ c_n\left(n(n-1)-6\right) & : n\geq 2 \end{cases}$$

alle $a_n = 0 \Rightarrow$

$c_0 = 0$

$c_1 = 0$

$n\geq 2$: $c_n \underbrace{\left(n(n-1)-6\right)}_{=0 \text{ für } n=3\text{, sonst } \neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_n = 0$ für $n>3$ und $n=2$

nur für $n=3$ ist $c_n = c_3$ unbestimmt

damit folgt für die allgemeine Lösung der Dgl.:

$$f(x) = c_3 x^3$$