Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2011/2012

Blatt 6: Abgabetermin 22.11.2011 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

$$4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2x(t) = 0 \quad .$$

a) Wie lautet ein geeigneter Ansatz für die Lösung dieser Differentialgleichung?

b) Auf welche algebraische Gleichung reduziert sich damit die Differentialgleichung?

c) Lösen Sie diese algebraische Gleichung.

d) Konstruieren Sie daraus die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. (1 Punkt)

e) Wie lautet die Lösung der Differentialgleichung für folgende Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}(0) = 1$$

(1 Punkt)

Die Differentialgleichung wird nun um einen Term erweitert:

f) Wie lautet die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2x(t) = ae^{\omega t} \quad ?$$

(1 Punkt)

g) Wie lautet nun die allgemeine Lösung? (1 Punkt)

Aufgabe 2: Differentialgleichung mit nicht-konstanten Koeffizienten

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(x) - 2xy(x) = 0 \; .$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe einer Separation der Variablen die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung. (2 Punkte)

b) Wie lautet die Lösung, die die Randbedingung $y(1) = 1$ erfüllt? (1 Punkt)

Aufgabe 3: inhomogene Differentialgleichung

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + bx(t) = ae^{-\lambda t} \; . \tag{1}$$

Die Konstanten a, b und λ sind gegeben, gesucht ist die Funktion $x(t)$. Die allgemeine Lösung $x_\mathrm{h}(t)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + bx(t) = 0 \; ,$$

hat offensichtlich die Form $x_\mathrm{h}(t) = ce^{-bt}$.

a) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1) mit Hilfe des Ansatzes

$$x_\mathrm{s}(t) = c(t)e^{-bt} \; .$$

b) Wie lautet damit die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1)? (1 Punkt)

c) Wie lautet die Lösung für die Randbedingung $x(0) = 0$? (1 Punkt)

Aufgabe 4: Differentialgleichungen: Potenzreihenansatz

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2 f''(x) - 6f(x) = 0 \; .$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung mit Hilfe des Potenzreihenansatzes

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \; .$$