Mathematische Methoden WS 2011/12

Blatt 7

Aufgabe 1: Differentialgleichungen, Potenzreihenansatz II

$$y'(x) - 2x\,y(x) = 0$$

Ansatz: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \rightarrow \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$

Einsetzen ergibt

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}}_{= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = 0$$

mit

$$a_0 = c_1 = 0$$
$$a_1 = 2c_2 - 2c_0 = 0$$
$$\vdots$$
$$a_n = (n+1)c_{n+1} - 2c_{n-1} = 0$$

damit folgt die Rekursionsrelation $\quad c_{n+1} = \frac{2}{n+1} c_{n-1}$

$\rightarrow$ $c_1 = 0 \Rightarrow$ alle c_n mit n ungerade gleich 0

$\rightarrow$ $c_0 = c$ unbestimmt (eine Integrationskonstante)

$$c_2 = \frac{2}{2} c_0 = \frac{1}{1} c, \quad c_4 = \frac{2}{4} c_2 = \frac{1}{1\cdot 2} c, \ \dots \ c_n = \frac{1}{(n/2)!} c \quad (n \text{ gerade})$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} c \frac{1}{(n/2)!} x^n = c \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \underbrace{x^{2m}}_{=(x^2)^m} = c\,e^{x^2}$$

Aufgabe 2: Differentialgleichungen, Potenzreihenansatz III

$$u''(x) - 2x\,u'(x) + (2\varepsilon - 1)\,u(x) = 0$$

a) Ansatz: $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \rightarrow \quad u'(x) = \dots, \ u''(x) = \dots$

Einsetzen ergibt:

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n + (2\varepsilon - 1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = 0$$

mit $a_0 = c_2\, 2\,(2-1) + (2\varepsilon-1)\, c_0 = 0$

$a_1 = c_3\, 3\,(3-1) - 2\, c_1 \cdot 1 + (2\varepsilon-1)\, c_1 = 0$

$\vdots$

$a_n = c_{n+2}\,(n+2)(n+1) - 2\, c_n \cdot n + (2\varepsilon-1)\, c_n = 0 \qquad (n)$

aus (n) folgt: $\quad c_{n+2} = \dfrac{1+2n-2\varepsilon}{(n+2)(n+1)}\, c_n \quad$ gilt für alle $n \geq 0$

b) für die Rekursion ergibt sich folgende Struktur:

$c_0 \longrightarrow c_2 \longrightarrow c_4 \longrightarrow c_6$

$c_1 \longrightarrow c_3 \longrightarrow c_5 \longrightarrow c_7 \ \ldots$

die c_0, c_1 sind unbestimmt (zwei Integrationskonstanten)

Fallunterscheidung:

i) $c_0 = c_1 = 0 \Rightarrow$ alle $c_n = 0$, d.h. $u(x) = 0$: triviale Lösung

ii) $c_0 \neq 0$, $c_1 = 0 \Rightarrow$ alle c_n mit n ungerade $= 0$

Rekursion bricht ab falls für ein m (m gerade) gilt $c_m \neq 0$, aber $c_{m+2} = 0$

$\rightarrow (1 + 2m - 2\varepsilon) = 0 \qquad \varepsilon = m + \frac{1}{2}, \quad m = 0, 2, 4, \ldots$

iii) $c_0 = 0$, $c_1 \neq 0 \Rightarrow$ alle c_n mit n gerade $= 0$

wie bei ii) folgt $\quad \varepsilon = m + \frac{1}{2}$, aber mit $m = 1, 3, 5, \ldots$

iv) $c_0 \neq 0$, $c_1 \neq 0$

$\rightarrow$ die Rekursion kann nicht für gerade und ungerade n abbrechen

d.h. man erhält ein Polynom endlicher Ordnung für

$$\varepsilon = m + \frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} m = 0, 2, 4, \ldots & \text{und } c_1 = 0 \\ m = 1, 3, 5, \ldots & \text{und } c_0 = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3: partielle Differentialgleichungen: Separation der Variablen

(I) $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial x} + y\, \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \qquad$ Ansatz: $\psi(x,y) = f(x)\, g(y)$

$f'(x)\, g'(y) + y\, f''(x)\, g(y) = 0 \qquad \Big| \cdot \dfrac{1}{f'(x)\, y\, g(y)}$

$$\underbrace{\frac{g'(y)}{y\,g(y)}}_{=\alpha} + \underbrace{\frac{f''(x)}{f'(x)}}_{=-\alpha} = 0 \qquad \longrightarrow \quad \text{zwei gewöhnliche Dgl.}$$

$$g'(y) = \alpha\, y\, g(y)$$

$$f''(x) = -\alpha\, f'(x)$$

$$(\text{II}) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} + z\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{Ansatz: } \psi(x,y,z) = f(x)\,g(y)\,h(z)$$

$$f'(x)g(y)h'(z) + f(x)g(y)h'(z) + z\,f(x)\,g''(y)h(z) = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{f(x)\,g(y)\,h'(z)}$$

$$\underbrace{\frac{f'(x)}{f(x)}}_{=\alpha} + \underbrace{1 + z\,\frac{g''(y)}{g(y)}\,\frac{h(z)}{h'(z)}}_{=-\alpha} = 0$$

$$\downarrow$$

$$1 + \alpha + z\,\frac{g''(y)}{g(y)}\,\frac{h(z)}{h'(z)} = 0 \quad \Big| \cdot \frac{g(y)}{g''(y)}$$

$$\underbrace{(1+\alpha)\,\frac{g(y)}{g''(y)}}_{=\beta} + \underbrace{z\,\frac{h(z)}{h'(z)}}_{=-\beta} = 0$$

$\Rightarrow$ drei gewöhnliche Dgl.:

(1) $f'(x) = \alpha\, f(x)$

(2) $(1+\alpha)\, g(y) = \beta\, g''(y)$

(3) $z\,h(z) = -\beta\, h'(z)$

Aufgabe 4: Vektoren

$\vec{r}_1 = (4,-3,2)$, $\vec{r}_2 = (3,4,0)$

a) $|\vec{r}_1| = \sqrt{29}$, b) $|\vec{r}_2| = 5$, c) $|2\vec{r}_1 - 3\vec{r}_2| = \sqrt{341}$

d) $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \vec{r}_1\cdot\vec{r}_1 - \vec{r}_2\cdot\vec{r}_2 = 4$

e) $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (-8,6,25)$, $|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = 5\sqrt{29}$

f) $\vec{n} = \frac{1}{5\sqrt{29}}\,(-8,6,25)$