Mathematische Methoden – WS 2011/12

Blatt 8

Aufgabe 1 : Skalar- und Kreuzprodukt

a) zu zeigen: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1 - a_3 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_3 \\ a_3 b_2 c_3 - a_3 b_3 c_2 - a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 \\ a_1 b_3 c_1 - a_1 b_1 c_3 - a_2 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 (a_2 c_2 + a_3 c_3) - c_1 (a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ b_2 (a_1 c_1 + a_3 c_3) - c_2 (a_1 b_1 + a_3 b_3) \\ b_3 (a_1 c_1 + a_2 c_2) - c_3 (a_1 b_1 + a_2 b_2) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 a_1 c_1 - c_1 a_1 b_1 \\ b_2 a_2 c_2 - c_2 a_2 b_2 \\ b_3 a_3 c_3 - c_3 a_3 b_3 \end{pmatrix}}_{= \vec{0}} =$$

$$= \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \checkmark$$

b) zu zeigen: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (ab)^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

linke Seite:

$$\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2 a_2 a_3 b_2 b_3$$
$$+ a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 - 2 a_3 a_1 b_3 b_1$$
$$+ a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2$$

rechte Seite:

$$a^2 b^2 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 =$$

$$= \underbrace{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}_{\text{ausmultiplizieren ...}} - \big(a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + 2 a_1 a_2 b_1 b_2$$
$$+ 2 a_1 a_3 b_1 b_3 + 2 a_2 a_3 b_2 b_3\big) \quad \checkmark$$

Aufgabe 2 : Drehmatrizen

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

a) $\varphi_1 = 0 \rightarrow D_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{4} \rightarrow D_{\varphi_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow D_{\varphi_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_4 = \pi \longrightarrow D_{\varphi_4} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$D_0 \vec{a} = \vec{a}, \quad D_{\pi/4} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D_{\pi/2} \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D_\pi \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D_0 \vec{b} = \vec{b}, \quad D_{\pi/4} \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad D_{\pi/2} \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D_\pi \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) zu zeigen: $D_\varphi^t = D_\varphi^{-1}$ d.h. $D_\varphi^t D_\varphi = \mathbb{1}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $$D_\varphi D_{\bar\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\bar\varphi & -\sin\bar\varphi \\ \sin\bar\varphi & \cos\bar\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\bar\varphi - \sin\varphi\sin\bar\varphi & -\cos\varphi\sin\bar\varphi - \sin\varphi\cos\bar\varphi \\ \sin\varphi\cos\bar\varphi + \cos\varphi\sin\bar\varphi & -\sin\varphi\sin\bar\varphi + \cos\varphi\cos\bar\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\bar\varphi) & -\sin(\varphi+\bar\varphi) \\ \sin(\varphi+\bar\varphi) & \cos(\varphi+\bar\varphi) \end{pmatrix} = D_{\varphi+\bar\varphi}$$

e) $$\vec{r}\,' = D_\varphi \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\varphi - b\sin\varphi \\ a\sin\varphi + b\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\vec{r}\,'|^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - 2ab\cos\varphi\sin\varphi$$
$$+ a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi + 2ab\cos\varphi\sin\varphi = (a^2+b^2)\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} = |\vec{r}|^2$$

Aufgabe 3: Matrixmultiplikation

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$CBAB = \begin{pmatrix} 25 & 18 & -7 \end{pmatrix}, \quad CB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$CBAB - 3CB = \begin{pmatrix} 22 & 9 & -13 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & -b \\ -a & b \end{pmatrix}$

$[A,B]_- = AB - BA =$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & -b \\ -a & b \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 & b^2-ab \\ -2ab & b^2+ab \end{pmatrix}} - \underbrace{\begin{pmatrix} b & -b \\ -a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2ab & 0 \\ -a^2-ab & b^2-ab \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -2ab & b^2-ab \\ a^2-ab & 2ab \end{pmatrix}$$

c) $(A)_{ij} = a$, $(B)_{ij} = b_j \delta_{im}$, $(C)_{ij} = c_i \delta_{mj}$, $(D)_{ij} = d_i \delta_{ij}$

$N = 4$, $m = 2$

$$\rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

d) $N \in \mathbb{N}$, $1 < m < N$

$$(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (A)_{ik} (A)_{kj} = N a^2$$

$$n \in \mathbb{N}: \ (D^n)_{ij} = d_i^n \delta_{ij}$$

$$(BC)_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (B)_{ik} (C)_{kj} = \sum_{k=1}^{N} b_k \delta_{im} c_k \delta_{mj} = \delta_{im}\delta_{mj} \sum_k b_k c_k$$

d.h. $(BC)_{mm} = \sum_k b_k c_k$ und alle anderen Matrixelemente $= 0$

$$(CB)_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (C)_{ik} (B)_{kj} = \sum_{k=1}^{N} c_i \delta_{mk} b_j \delta_{km} = c_i b_j$$

$$(AD)_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (A)_{ik} (D)_{kj} = a \sum_{k=1}^{N} d_k \delta_{kj} = a d_j$$