Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2011/2012

Blatt 8: Abgabetermin 06.12.2011 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Skalar- und Kreuzprodukt

Zeigen Sie folgende Identitäten:

a)
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \ ,$$
(1 Punkt)

b)
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (ab)^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \ ,$$
mit $a = |\vec{a}|$ und $b = |\vec{b}|$. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Drehmatrizen

Die Drehmatrizen D_φ für eine Drehung um den Winkel φ in der zweidimensionalen Ebene sind gegeben durch:

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \ .$$

a) Geben Sie die Matrix D_φ für folgende Winkel an: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/4$, $\varphi_3 = \pi/2$, $\varphi_4 = \pi$.

b) Veranschaulichen Sie die Wirkung von D_{φ_i} $(i = 1, 2, 3, 4)$ auf die Vektoren $\vec{a} = (1, 0)$ und $\vec{b} = (1, 1)$.

c) Zeigen Sie, dass für die transponierte Matrix D_φ^{t} gilt: $D_\varphi^{\mathrm{t}} = D_\varphi^{-1}$.

d) Die Hintereinanderausführung zweier Drehungen ist wieder eine Drehung. Zeigen Sie, dass entsprechend gilt: $D_\varphi D_{\bar{\varphi}} = D_{\varphi+\bar{\varphi}}$. (1 Punkt)

e) Zeigen Sie für einen beliebigen Vektor $\vec{r} = (a, b)$, dass die Drehung dieses Vektors um den Winkel φ, d.h. $\vec{r}\,' = D_\varphi \vec{r}$, den Betrag des Vektors nicht ändert. (1 Punkt)

Aufgabe 3: Matrixmultiplikation

a) Berechnen Sie das Produkt:

$$CBAB - 3CB$$

für die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

b) Berechnen Sie den Kommutator $[A, B]_- = AB - BA$ für die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix} , \ B = \begin{pmatrix} b & -b \\ -a & b \end{pmatrix} \quad .$$

(1 Punkt)

Betrachten Sie jetzt die folgenden $(N \times N)$-Matrizen A, B, C und D mit den Matrixelementen:

$$(A)_{ij} = a \quad , \quad (B)_{ij} = b_j \delta_{im} \quad , \quad (C)_{ij} = c_i \delta_{mj} \quad , \quad (D)_{ij} = d_i \delta_{ij} \ .$$

c) Geben Sie diese Matrizen für $N = 4$ und $m = 2$ in der üblichen Matrixdarstellung an.

d) Bilden Sie für allgemeine $N \in \mathbb{N}$ und $1 \leq m \leq N$ die folgenden Matrixprodukte:

$$A^2 \ , \ D^n \ (n \in \mathbb{N}) \ , \ BC \ , \ CB \ , \ AD \ .$$

(5 Punkte)