Klausur zur Vorlesung Mathematische Methoden (Lehramt - Bachelor)

Fr., den 16.12.2011

Aufgabe 1: Taylor-Reihe

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2} \qquad f^{(2)}(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-5/2} \qquad f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)(1+x)^{-7/2} \qquad f^{(4)}(0) = -\frac{15}{16}$$

Taylor-Reihe um $x = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{3}{8}x^3 - \frac{1}{4!}\frac{15}{16}x^4 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \ldots$$

Aufgabe 2 : Integration

a, $\underbrace{\int_0^1 x^2 e^{-2x}\, dx}$ $= \ldots$ partielle Integration : $\int_0^1 u v'\, dx = [uv]_0^1 - \int_0^1 u'v\, dx$

$u = x^2 \qquad v' = e^{-2x}$

$u' = 2x \qquad v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

$$\ldots = \underbrace{\left[-\frac{1}{2}x^2 e^{-2x}\right]_0^1}_{= -\frac{1}{2}e^{-2}} + \underbrace{\int_0^1 x e^{-2x}\, dx} = \ldots$$

nochmals partielle Integration mit $u = x \qquad v' = e^{-2x}$

$u' = 1 \qquad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$$\ldots = -\frac{1}{2}e^{-2} + \underbrace{\left[-\frac{1}{2}x e^{-2x}\right]_0^1}_{= -\frac{1}{2}e^{-2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}\, dx =$$

$$= -e^{-2} - \frac{1}{4}\underbrace{\left[e^{-2x}\right]_0^1}_{= e^{-2}-1} = -e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}$$

b, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx}$ uneigentliche Integral, da Integrand singulär bei $x = 0$

$$= \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

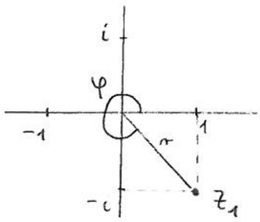
$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

c, $\int_0^1 \sum_{n=1}^{N} (n+1) x^n\, dx = \sum_{n=1}^{N} (n+1) \underbrace{\int_0^1 x^n\, dx}_{= \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}} = \ldots$

$$\ldots = \sum_{n=1}^{N} \frac{n+1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} 1 = N$$

Aufgabe 3 : Komplexe Zahlen

$z_1 = 1 - i \quad , \quad z_2 = 3 + 4i$

a) 

$\Rightarrow \quad r = \sqrt{2} \quad , \quad \varphi = \frac{7}{4}\pi$

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i \frac{7}{4}\pi} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

b) $z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+4i) = 3 - 3i + 4i - 4i^2 = 7 + i$

$\mathrm{Re}\,(z_1 \cdot z_2) = 7 \qquad \mathrm{Im}\,(z_1 \cdot z_2) = 1$

c) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{3+4i}\,\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{1}{25}(-1-7i) \quad , \quad \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{1}{25} \quad , \quad \mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{7}{25}$

d) $$(z_1)^{10} = \left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = 2^{10/2}\, \underbrace{e^{-i\frac{10}{4}\pi}} = -32\,i$$

$$\underbrace{e^{-i\frac{10}{4}\pi}} = \underbrace{e^{-i\frac{8}{4}\pi}}_{=1}\ \underbrace{e^{-i\frac{2}{4}\pi}}_{=e^{-i\pi/2}} = -i$$

$\mathrm{Re}\left((z_1)^{10}\right) = 0$

$\mathrm{Im}\left((z_1)^{10}\right) = -32$

e) $z_n = e^{in\pi} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$

$z_0 = 1 \,,\ z_1 = -1 \,,\ z_2 = 1 \,, \dots$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\,(z_n) = (-1)^n \quad , \quad \mathrm{Im}\,(z_n) = 0$

Aufgabe 4 : gewöhnliche Differentialgleichungen

$$-6x''(t) + x'(t) + 2x(t) = 0 \qquad (*)$$

a) Ansatz: $x(t) = Ae^{\alpha t} \rightarrow x'(t) = \alpha x(t)\,, \quad x''(t) = \alpha^2 x(t)$

Einsetzen in $(*)$: $\quad -6\alpha^2 x(t) + \alpha x(t) + 2x(t) = 0$

daraus folgt die algebraische Gleichung: $\quad -6\alpha^2 + \alpha + 2 = 0$

mit den Lösungen: $\quad \alpha_1 = \frac{2}{3}\,, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}$

b) allgemeine Lösung: $\quad x(t) = A_1 e^{\frac{2}{3}t} + A_2 e^{-\frac{t}{2}}$

c) Anfangsbedingungen:

$$x(0) = A_1 + A_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = -A_2 \qquad (\mathrm{I})$$

$$\dot{x}(0) = 1$$

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{3}A_1 e^{\frac{2}{3}t} - \frac{1}{2}A_2 e^{-t/2} \quad \rightarrow \quad \dot{x}(0) = \frac{2}{3}A_1 - \frac{1}{2}A_2 = 1 \qquad (\mathrm{II})$$

(I) in (II):

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)A_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{6}{7} \quad \text{und} \quad A_2 = -\frac{6}{7}$$

und damit: $\quad x(t) = \frac{6}{7}e^{\frac{2}{3}t} - \frac{6}{7}e^{-\frac{t}{2}}$

Aufgabe 5 : gewöhnliche Differentialgleichungen : Potenzreihenansatz

$$x^2 f''(x) - 12 f(x) = 0$$

Ansatz : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \rightarrow \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}$

Einsetzen in die Dgl :

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^n - 12 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = 0$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{mit} \quad a_n = \begin{cases} -12\, c_0 & : n=0 \\ -12\, c_1 & : n=1 \\ c_n\,(n(n-1)-12) & , n \geq 2 \end{cases}$$

alle $a_n = 0$

$$\Rightarrow \quad c_0 = 0$$
$$c_1 = 0$$

und für $n \geq 2$: $c_n \underbrace{(n(n-1)-12)}_{=0 \text{ für } n=4, \text{ sonst } \neq 0} = 0$

$\Rightarrow \quad c_n = 0 \quad$ für $\quad n = 2, 3, 5, 6, 7, \ldots$

nur für $n = 4$ ist $c_n = c_4$ unbestimmt

damit folgt für die allgemeine Lösung der Dgl

$$f(x) = c_4 x^4$$

Aufgabe 6: Vektoren

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{a}) + \underbrace{(\vec{b}\times\vec{a})}_{=-(\vec{a}\times\vec{b})}(\vec{c}+\vec{b}) = \ldots$$

$$\ldots = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{a}-\vec{c}-\vec{b}) =$$ (distributiv)

$$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a} - (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b} = \ldots$$

$\vec{a}\times\vec{b}$ steht $\perp$ auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$\ldots = 0$ für beliebige $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Aufgabe 7: Matrixmultiplikation

$$M_n = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) $M_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $(M_2)^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & 2a \\ 2a & a^2+1 \end{pmatrix}$

$M_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, $(M_3)^3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a^2+2 & 2a & 2a \\ 2a & a^2+1 & 1 \\ 2a & 1 & a^2+1 \end{pmatrix}$$

b)

$$M_n^2 = \begin{pmatrix} a^2+(n-1) & 2a & 2a & \dots & 2a \\ 2a & a^2+1 & 1 & \dots & 1 \\ 2a & 1 & a^2+1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 2a & 1 & 1 & & a^2+1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 : Eigenvektoren, Eigenwerte

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - a\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} 0-a & 1 \\ 1 & 0-a \end{pmatrix} = a^2 - 1 = 0$$

$a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad$ Eigenwerte $\quad a_{1/2} = \pm 1$

Eigenvektoren:

$\underline{a_1 = +1}$: $\quad A\vec{x} = a_1 \vec{x} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \quad$ (I) $x_2 = x_1$

(II) $x_1 = x_2$

$\Rightarrow$ alle $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren zum Eigenwert $a_1 = 1$

normierte Eigenvektor : $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{a_2 = -1}$: $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad$ (I) $x_2 = -x_1$

(II) $x_1 = -x_2$

$\Rightarrow$ alle $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren zum Eigenwert $a_2 = -1$

normierte Eigenvektor : $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$