Klausur zur Vorlesung

Mathematische Methoden (Lehramt-Bachelor)

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2011/2012

Fr., 16.12.2011, 14:15 - 16:15

Hinweis: Maximal sind 100 Punkte zu erreichen. Für das Bestehen der Klausur benötigen Sie mindestens 50 Punkte.

Aufgabe 1: Taylor-Reihe

(11 Punkte)

Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

um den Punkt $x = 0$ bis einschließlich der Ordnung x^4 .

Aufgabe 2: Integration

(13 Punkte)

(Hinweis: Verwenden Sie zur Integration die partielle Integration (wenn nötig) und beachten Sie, dass die Integrale eventuell nur als uneigentliche Integrale definiert sind.)

Berechnen Sie folgende Integrale:

a)

$$\int_0^1 x^2\, e^{-2x}\, \mathrm{d}x \ , \ \text{(6 Punkte)}$$

b)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x \ , \ \text{(4 Punkte)}$$

c)

$$\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x \quad , \ \text{mit} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{N} (n+1) x^n \quad \text{und } N \in \mathbb{N} \ . \ \text{(3 Punkte)}$$

Aufgabe 3: komplexe Zahlen

(14 Punkte)

Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 - i \quad , \quad z_2 = 3 + 4i \quad .$$

a) Stellen Sie z_1 in der Form $z_1 = re^{i\varphi}$ dar, d.h. geben Sie r und φ an. (3 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils Real- und Imaginärteil von

b) $z_1 z_2$, (2 Punkte)

c) $\frac{z_1}{z_2}$, (3 Punkte)

d) $(z_1)^{10}$. (3 Punkte)

e) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen $z_n = e^{in\pi}$ für $n \in \mathbb{Z}$. (3 Punkte)

Aufgabe 4: Gewöhnliche Differentialgleichungen

(14 Punkte)

Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

$$-6\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 2x(t) = 0 \quad .$$

a) Auf welche algebraische Gleichung lässt sich diese Differentialgleichung (mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes) reduzieren. Lösen Sie diese algebraische Gleichung. (6 Punkte)

b) Konstruieren Sie daraus die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. (4 Punkte)

c) Wie lautet die Lösung der Differentialgleichung für folgende Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}(0) = 1 \quad . \text{ (4 Punkte)}$$

Aufgabe 5: Gewöhnliche Differentialgleichungen: Potenzreihenansatz

(14 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2 f''(x) - 12 f(x) = 0 \ .$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung mit Hilfe des Potenzreihenansatzes

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ .$$

Aufgabe 6: Vektoren

(7 Punkte)

Berechnen Sie für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{a}) + (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot (\vec{c} + \vec{b}) \quad .$$

Aufgabe 7: Matrixmultiplikation

(13 Punkte)

M_n sei eine $n \times n$-Matrix, definiert durch

$$M_n = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie $(M_2)^2$ und $(M_3)^2$. (7 Punkte)

b) Berechnen Sie das Matrixprodukt $(M_n)^2$ für allgemeines $n \in \mathbb{N}$. (6 Punkte)

Aufgabe 8: Eigenvektoren, Eigenwerte

(14 Punkte)

Berechnen Sie die normierten Eigenvektoren und die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$