Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, L. Hollender

WS 2009/2010

Blatt X: Abgabetermin 12.01.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Klassifizierung von Differentialgleichungen

Gegeben seien folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + t\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + 2 = 0 \quad , \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + f(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3} + t^4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x(t) = 0 \quad , \qquad f^4(x) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}x = 0 \quad .$$

Klassifizieren Sie diese Differentialgleichungen nach folgenden Kriterien:

- gewöhnlich/partiell
- linear/nicht-linear
- homogen/nicht homogen
- konstante/nicht-konstante Koeffizienten

Von welcher Ordnung sind die Differentialgleichungen jeweils?

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

$$4\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2x(t) = 0 \quad .$$

a) Wie lautet ein geeigneter Ansatz für die Lösung dieser Differentialgleichung?

b) Auf welche algebraische Gleichung reduziert sich damit die Differentialgleichung?

c) Lösen Sie diese algebraische Gleichung.

d) Konstruieren Sie daraus die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

e) Wie lautet die Lösung der Differentialgleichung für folgende Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}(0) = 1$$

Die Differentialgleichung wird nun um einen Term erweitert:

e) Wie lautet die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2x(t) = ae^{\omega t} \quad ?$$

f) Wie lautet nun die allgemeine Lösung?

(7 Punkte)

Aufgabe 3: Differentialgleichung mit nicht-konstanten Koeffizienten

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(x) - 2xy(x) = 0\ .$$

Lösen Sie diese DGL durch

a) Separation der Variablen,

b) Potenzreihenansatz um $x = 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4: Variation der Konstanten

Radioaktive Kerne zerfallen nach dem Gesetz $dN(t)/dt = -\lambda N(t)$. Dabei ist N die Anzahl der Kerne und $\lambda > 0$ eine zu bestimmmende Zerfallskonstante. In einer radioaktiven Zerfallsreihe mit 2 verscheidenen Kernen gilt dann

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t)\ , \tag{1}$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t). \tag{2}$$

Diese Gleichungen berücksichtigen die Tatsache, dass die Zahl der Kerne vom Typ 2 durch den Zerfall zwar geschmälert wird, durch den Zerfall von Kernen vom Typ 1 jedoch wieder anwächst. Bestimmmen Sie $N_2(t)$ mit den Anfangsbedingungen $N_1(0) = N_0$ und $N_2(0) = 0$ indem Sie folgende Schritte abarbeiten:

a) Lösen Sie die erste DGL (1).

b) Da nun $N_1(t)$ bekannt ist, wird (2) zu einer inhomogenen DGL 1. Ordnung. Lösen Sie hier die homogene DGL für $N_2(t)$.

c) Die Lösung von (2) ist die allgemeine Lösung + spezielle Lösung. Die spezielle Lösung kann gefunden werden, indem der normalerweise konstante Koeffizient der allgemeinen Lösung als variabel angenommen wird. Das heißt, setzen Sie $N_2(t) = C(t) \cdot e^{-\lambda_2 t}$. Berechnen Sie nun $dN_2(t)/dt$ und bestimmen durch Vergleich mit (2) $C(t)$. Dies liefert eine spezielle Lösung der 2. DGL.

d) Jetzt kann die gesamte Lösung $N_2(t)$ mit den entsprechenden Anfangswerten angegeben werden.

(6 Punkte)