Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, L. Hollender

WS 2009/2010

Blatt XI: Abgabetermin 19.01.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Potenzreihenansatz - Frobenius-Methode

Gegeben sei die gewöhnliche DGL zweiter Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten:

$$\psi''(x) - x^2\psi(x) = -2\varepsilon\psi(x) \tag{1}$$

a) Verwenden Sie den Ansatz $\psi(x) = u(x)e^{-x^2/2}$ um aus Gleichung (1) eine DGL für die Funktion $u(x)$ herzuleiten.

b) Machen Sie nun den Potenzreihenansatz

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

und bestimmen Sie eine Rekursionsrelation zur Bestimmung der b_n.

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Fourier-Reihe: allgemeine Eigenschaften

a) Zeigen Sie, analog zur Vorlesung, daß für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \delta_{nm}\;, \quad (n \neq 0)\;,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0\;.$$

b) Welche Eigenschaft hat eine Funktion $f(x)$ für dessen Fourier-Reihe gilt:

i) $a_n = 0$ für jedes n,

ii) $b_n = 0$ für jedes n.

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Darstellung einer gegebenen Funktion als Fourier-Reihe

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ -x, & -\pi < x < 0 \end{cases}, \tag{2}$$

welche durch $f(x) = f(x + 2\pi)$ periodisch fortgesetzt wird. Wie lautet die Fourier-Reihe dieser Funktion?

(3 Punkte)

Aufgabe 4: Ableitung von Fourier-Reihen

a) Betrachten Sie die Fourier-Reihe der Funktion

$$f(x) = x \,, \quad -\pi < x < \pi$$

welche durch $f(x) = f(x + 2\pi)$ periodisch fortgesetzt wird. Berechnen Sie im Intervall $-\pi < x < \pi$ die erste Ableitung der Funktion sowie der zugehörigen Fourier-Reihe. Welches Problem tritt dabei auf?

b) Betrachten Sie die Funktion (2) in Aufgabe 3 noch einmal. Skizzieren Sie diese Funktion sowie deren erste Ableitung. Berechnen Sie die erste Ableitung der Fourier-Reihe im Intervall $]0, \pi[$. Vergleichen Sie das Resultat mit der Fourier-Reihe für die Rechteck-Welle (siehe Vorlesung).

(7 Punkte)

Aufgabe 5: Fourier-Transformation

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte folgender Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} h(1 - a|x|)\,, & |x| < 1/a \\ 0\,, & |x| > 1/a \end{cases}$$

Diskutieren Sie den Grenzfall $a \to \infty$ mit $a = h$.

(4 Punkte)