Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, L. Hollender

WS 2009/2010

Blatt XII: Abgabetermin 26.01.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Fourier-Transformation II

Die Fourier-Transformierte einer zeitabhängigen Größe $f(t)$ (wobei $f(t)$ z.B. das Ausgangssignal eines Verstärkers ist) sei gegeben durch eine Summe von δ-Peaks:

$$g(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2} \delta(\omega - n\omega_0) \, , \qquad \text{mit } \omega_0 > 0.$$

Berechnen Sie daraus durch Fourier-Transformation die Größe $f(t)$; diese ergibt sich als Überlagerung von Cosinus-Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen. Berechnen Sie aus diesen $f(t)$ wieder durch Fourier-Transformation die Funktion $g(\omega)$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2: Rechenregeln für die Vektordifferentiation

Gegeben seien zwei Bahnkurven

$$\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t^2 \\ t(1-t) \end{pmatrix} , \quad \vec{r_2} = \begin{pmatrix} t^3 \\ -1 \\ 2t^2 - 1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie direkt <u>und</u> unter Verwendung allgemeiner Differentiationsregeln die Ausdrücke

a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} \right) ,$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\vec{r_1} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r_1}}{\mathrm{d}t} \right) .$$

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 3: Krümmung und Torsion der Schraubenbahn

Gegeben sei folgende Schraubenbahn:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \\ t \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie für diese Bahn die folgenden Größen:

a) Geschwindigkeit $v(t)$,

b) Bogenlänge $s(t)$,

c) Tangenten-Einheitsvektor $\vec{t}(t)$ und $\vec{t}(s)$,

d) Krümmung $\kappa(t)$ und Krümmungsradius $\rho(t)$,

e) Hauptnormale $\vec{n}(t)$,

f) Binormale $\vec{b}(t)$,

g) Torsion $\tau(t)$.

Skizzieren Sie außerdem die Schraubenbahn für $\omega = 2\pi$ und $t \in [0, 2]$

(6 Punkte)

Aufgabe 4: Partielle Ableitungen

Gegeben seien die Felder

$$A(\vec{r}) = x^2 \sin(xz) + ze^y, \quad \text{und} \quad \vec{B}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x + y \\ x^2 \cos(z) \\ xyz \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden partiellen Ableitungen:

a)
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} A(\vec{r}) \ , \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A(\vec{r}) \ , \quad \frac{\partial}{\partial z} \vec{B}(\vec{r}) \ ,$$

b)
$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} A(\vec{r}) \\ \frac{\partial}{\partial y} A(\vec{r}) \\ \frac{\partial}{\partial z} A(\vec{r}) \end{pmatrix},$$

c)
$$B_1(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x} B_x(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial y} B_y(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial z} B_z(\vec{r}) \, ,$$

wobei $B_x(\vec{r}), \ B_y(\vec{r}), \ B_z(\vec{r})$ die Komponenten des Feldes $\vec{B}(\vec{r})$ sind.

(5 Punkte)