Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, L. Hollender

WS 2009/2010

Blatt XIII: Abgabetermin 02.02.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Gradient

Bestimmen die das Gradientenfeld folgender Felder:

$$\varphi_1(\vec{r}) = r^n \; , \qquad \varphi_2(\vec{r}) = \left(\vec{B} \times \vec{r}\right) \cdot \vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2: Laplaceoperator

Bestimmen Sie $\Delta\varphi$ für die skalaren Felder

$$\varphi_1(\vec{r}) = \sin\left(\vec{k} \cdot \vec{r}\right) \quad , \quad \varphi_2(\vec{r}) = \exp(-\alpha r^2) \; , \quad \text{mit } r = |\vec{r}|$$

(mit $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$).

(4 Punkte)

Aufgabe 3: Rotation - allgemeine Rechenregeln

Beweisen Sie für allgemeine skalare Felder $\varphi(\vec{r})$ und Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r})$ die Gleichungen:

$$\vec{\nabla} \times \left(\varphi \vec{A}\right) = \varphi \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla}\varphi \; ,$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \Delta\vec{A} \; .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4: Normalenvektor, Richtungsableitung

Gegeben Sei das skalare Feld

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \quad .$$

Die Fläche mit konstantem $\varphi = 1$ definiert ein Rotationsellipsoid.

a) Wie lautet der nach außen zeigende Normalenvektor auf der Oberfläche allgemein sowie speziell an den Punkten:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} a/\sqrt{2} \\ a/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} a/\sqrt{3} \\ a/\sqrt{3} \\ b/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} -a/2 \\ a/\sqrt{2} \\ -b/2 \end{pmatrix} \quad .$$

b) Wie ändert sich φ an diesen Punkten für kleine Verschiebungen in (1,1,1)-Richtung?

(5 Punkte)

Aufgabe 5: Wiederholung: Differentialgleichungen

a) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B$$

mit Konstanten A und B. Lösen Sie diese mit Hilfe der Variation der Konstanten. Welches Ergebnis erhält man unter Verwendung der Anfangsbedingung $x(0) = 0$?

b) Die Differentialgleichung

$$y'(x) = -y^2(x)$$

lässt sich mit Hilfe der Separation der Variablen lösen. Bestimmen Sie die Lösung für die Anfangsbedingung $y(0) = \frac{1}{2}$.

(4 Punkte)