Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, L. Hollender

WS 2009/2010

Blatt III: Abgabetermin 03.11.2009 vor Vorlesung

Aufgabe 1: Taylorentwicklung

Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der folgenden Funktionen. Schreiben Sie das Ergebnis in der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

wobei die a_n zu bestimmen sind.

a) $f(x) = x \sin(x)$

b) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$

Bestimmen Sie hier zusätzlich die Ableitung von $f(x)$ indem Sie

1. die Taylor-Reihe bilden und diese ableiten
2. die Ableitung bilden und hiervon die Taylor-Reihe.

(2 Punkte)

*c) Es sei folgende Funktion gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ist im Punkt $x = 0$ unendlich oft stetig differenzierbar. Bestimmen Sie die Grenzwerte der Ableitungen für $x \to 0$ und damit die ersten 4 Glieder der Taylor-Reihe. Begründen Sie (ohne Rechnung), gegen welchen Wert die gesamte Taylor-Reihe letztendlich konvergiert. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Substitution und partielle Integration

Berechnen Sie folgende Integrale

a)

$$\int_0^x y^3 e^{-y^2} \, \mathrm{d}y$$

(bitte wenden)

b) Führen Sie das folgende Integral auf die Fehlerfunktion (error function) $\mathrm{erf}(x)$ zurück.

$$\int_0^x y^2 e^{-y^2}\ \mathrm{d}y$$

c) Lösen Sie die folgenden Integrale für die allgemeine Funktion $f(x)$.

(i)

$$\int_a^b f(x)f'(x)dx$$

(ii)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3: uneigentliche Integrale

Berechnen Sie folgende Integrale

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$

b)

$$\int_0^2 \frac{2x}{x^2-1}\ \mathrm{d}x$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4: Parameterintegrale

Gegeben sei

$$F(y) = \int_a^b \sin(xy)\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x\ , \qquad 0 < a < b$$

Berechnen Sie

a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(y)$$

b)

$$\int_\eta^\xi F(y)\mathrm{d}y$$

Das dabei auftretende Integral der Form $(\cos x)/x^2$ braucht nicht berechnet zu werden.

(2 Punkte)