Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, L. Hollender

WS 2009/2010

Blatt IV: Abgabetermin 10.11.2009 vor Vorlesung

Aufgabe 1: δ-Funktion

Berechnen Sie

a)
$$\int_{-1}^{1} \Big(f(x) - f(0) \Big) \delta(x) \, \mathrm{d}x \quad ,$$

b)
$$\int_{1}^{2} \cos(x) \delta(x) \, \mathrm{d}x \quad ,$$

c)
$$\int_{0}^{4\pi} \sin(x) \delta\Big(\cos(x) \Big) \, \mathrm{d}x \quad .$$

d) Geben Sie ein vereinfachte Darstellung von $\delta(x^2 - x_0^2)$ an.

(3 Punkte)

Aufgabe 2: δ-Funktion – Darstellung durch Funktionenfolgen I

Die δ-Funktion sei als Limes folgender Funktionenfolge gegeben:

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ , \quad \text{mit} \quad f_n(x) = \begin{cases} n & : \quad |x| < \frac{1}{2n} \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \delta(x) \, \mathrm{d}x \ , \quad \text{mit} \quad \psi(x) = 1 + x^2 \tag{1}$$

durch

a) direkte Auswertung von Gleichung (1).

b) Berechnung von
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f_n(x) \, \mathrm{d}x$$
mit anschließender Limesbildung $\lim_{n\to\infty}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3: δ-Funktion – Darstellung durch Funktionenfolgen II

Betrachten Sie die Funktionen

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \sqrt{1-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2} & : \quad \left|\frac{x}{\varepsilon}\right| < 1 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

a) Konstruieren Sie aus $f_\varepsilon(x)$ eine Darstellung der δ-Funktion.

Gegeben seien die Funktionen:

$$f_\varepsilon(x) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{x^2+\varepsilon^2} \quad .$$

b) Zeigen Sie, daß

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x \neq 0) = 0 \quad , \quad \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x = 0) = \infty \qquad .$$

c) Gilt für diese Funktionenfolge

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = \delta(x) \quad ?$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4: Vektoren

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{r}_1 = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \quad , \quad \vec{r}_2 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \qquad .$$

Bestimmen Sie:

a) $|\vec{r}_1|$

b) $|\vec{r}_2|$

c) $|2\vec{r}_1 - 3\vec{r}_2|$

d) $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des durch $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ aufgespannten Parallelogramms.

f) Bestimmen Sie den Normalenvektor dieses Parallelogramms.

(3 Punkte)