

Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, L. Hollender

WS 2009/2010

Blatt V: Abgabetermin 17.11.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Matrixoperationen

Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 3)$$

- Welche Produkte zwischen je zwei dieser Matrizen lassen sich durchführen (wie z.B. AB , AC , etc.)?
- Berechnen Sie das Produkt:

$$CBAB - 3CB$$

Gegeben seien nun folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & -b \\ -a & b \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie den Kommutator $[A, B]_- = AB - BA$.

(3 Punkte)

Aufgabe 2: Determinanten

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & b \end{pmatrix}$$

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 3: Drehmatrizen

Gegeben seien die Matrizen

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

- Geben Sie die Matrix D_φ für folgende Winkel an: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/4$, $\varphi_3 = \pi/2$, $\varphi_4 = \pi$.
- Veranschaulichen Sie die Wirkung von D_{φ_i} ($i = 1, 2, 3, 4$) auf die Vektoren $\vec{a} = (1, 0)$ und $\vec{b} = (1, 1)$.
- Zeigen Sie, dass für die transponierte Matrix D_φ^t gilt: $D_\varphi^t = D_\varphi^{-1}$.
- Die Hintereinanderausführung zweier Drehungen ist wieder eine Drehung, also muss gelten: $D_\varphi D_{\bar{\varphi}} = D_{\varphi+\bar{\varphi}}$.
- Zeigen Sie für einen beliebigen Vektor $\vec{r} = (a, b)$, dass die Drehung dieses Vektors um den Winkel φ , d.h. $\vec{r}' = D_\varphi \vec{r}$, den Betrag des Vektors nicht ändert.

(5 Punkte)

Aufgabe 4: Vektoridentität und Matrixprodukt

- Rechnen Sie die bac-cab Regel nach:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

- Berechnen Sie das Produkt AB der folgenden allgemeinen $n \times n$ -Matrizen:

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = |i - j| + 1 \quad \text{und} \quad B = (b_{ij}), \quad b_{ij} = 2\delta_{ij} + 4(\delta_{i,j+1} + \delta_{i+1,j})$$

(3 Punkte)

Aufgabe 5: Integrale zur Übung

-

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$$

-

$$\int \frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{4+8x}} dx$$

-

$$\int_0^2 x \sinh(x^2) dx$$

-

$$\int \frac{\cos(\pi - x)}{e^{2x}} dx$$

(4 Punkte)