Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, L. Hollender

WS 2009/2010

Blatt VI: Abgabetermin 24.11.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Determinanten I

Zeigen Sie, dass die Determinanten folgender Matrizen M_i $(i = 1, \ldots, 4)$ gleich sind (ohne explizite Berechnung der Werte für $|M_i|$). Verwenden Sie hierzu die Eigenschaften der Determinante, wie z.B., dass man das Vielfache einer Reihe auf eine andere Reihe addieren darf, ohne das sich der Wert der Determinante ändert.

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & b & a \\ b & 2a & a & 0 \\ 2b & a & -a & a \\ 0 & a & b & b \end{pmatrix} \quad , \quad M_2 = \begin{pmatrix} b & a & -a & b \\ a & 0 & a & b \\ a & b & 2b & 0 \\ b & 3a & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & b & 2b & 0 \\ 0 & 2a & a & a \\ b & a & -a & b \\ a & 0 & a & b \end{pmatrix} \quad , \quad M_4 = \begin{pmatrix} 2b & a & -a & a \\ 0 & a & b & b \\ a & 0 & b & a \\ b & 2a & a & 0 \end{pmatrix}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Determinanten II

Zeigen Sie, dass die Determinanten folgender Matrizen verschwinden (wieder ohne explizite Berechnung).

$$A = \begin{pmatrix} b^2/a & b & b \\ c & b & 0 \\ -b & -a & -a \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 3: mehrfaches Vektorprodukt

Welches Volumen spannen folgende Vektoren auf:

$$\vec{r_1} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_3} \;\; ; \;\; \vec{r_2} = -2\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3} \;\; ; \;\; \vec{r_3} = \vec{e_1} - \vec{e_2} - 3\vec{e_3} \;\; ;$$

(2 Punkte)

Aufgabe 4: lineares Gleichungssystem

Stellen Sie folgendes lineares Gleichungssystem in Matrixschreibweise dar. Lösen Sie das Gleichungssystem durch Inversion der entsprechenden Matrix.

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 2 \\ x - y + z &= 0 \\ -3x - 5y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5: Determinanten von $n \times n$ Matrizen

a) Zeigen Sie, dass die Determinante einer unteren Dreiecksmatrix das Produkt seiner Diagonaleinträge ist, d.h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & & \dots & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \,.$$

Dies gilt im übrigen genauso für eine obere Dreieckmatrix, da das Transponieren den Wert der Determinante nicht ändert.

b) Berechnen Sie die folgende $n \times n$-Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & (n-1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 6: Wiederholung zur δ-Funktion

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a)

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} \delta(x+1) \left[1 - \cos\left(\frac{5\pi}{2} x \right) \right] dx$$

b)

$$\int_{-10}^{10} x \delta(x^2 - 5x + 6) dx$$

(3 Punkte)