

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, L. Hollender

WS 2009/2010

Blatt VII: Abgabetermin 01.12.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Real- und Imaginärteil

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

a)

$$(3 + 4i)^2$$

b)

$$\frac{3 + 4i}{3 - 4i}$$

c)

$$i \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\sin(x) - i \cos(x)}{i \sin(y) + \cos(y)}$$

Hierbei sind $r_1, r_2, x, y \in \mathbb{R}$ und $r_2 \neq 0$.

(3 Punkte)

Aufgabe 2: Darstellung in Polarkoordinaten

a) Geben Sie für folgende komplexe Zahlen die Polardarstellung an

$$z_1 = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \quad , \quad z_2 = \sqrt{3} - i \quad , \quad z_3 = z_1 \cdot z_2$$

b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

$$e^{12\pi i} \quad , \quad 3 \cdot e^{-0.5\pi}$$

c) Stellen Sie die Summe $z_1 + z_2$ mit

$$z_1 = 2e^{i\pi/4} \quad , \quad z_2 = 6e^{i\pi/3}$$

in Polarkoordinaten dar.

(8 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 3: Komplexe Zahlen: Gemischtes

- a) Stellen Sie eine Beziehung zwischen den Winkelfunktionen (Cosinus und Sinus) und den hyperbolischen Funktionen ($\sinh$ und $\cosh$) her. Schauen Sie sich dafür die Definition der hyperbolischen Funktionen an.
- b) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x^2 + 4x + 6, \quad x \in \mathbb{C}.$$

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

- c) Zeigen Sie den Satz von Moivre, der besagt, dass für alle $x \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

Wie transformiert sich das Gebiet $G = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < 1, \pi/4 < \varphi < \pi/2 \right\}$ unter folgenden Abbildungen:

d) $f(z) = z^2$

e) $g(z) = \bar{z}$

Skizzieren Sie sowohl das Gebiet G , als auch die durch d) und e) entstandenen neuen Gebiete, welche die Wertebereiche von $f(z)$ und $g(z)$ sind, d.h. $f(G)$ und $g(G)$.

Hinweis: Parametrisieren Sie den Rand des Gebietes durch drei verschiedene Funktionen. Das heißt, bestimmen Sie Funktionen, die am Rand entlang verlaufen (z.B. $x(t) = it$, $t \in (0, 1)$, welche den linken Rand des Gebietes G beschreibt). Nun können die Ränder der neuen Gebiete leicht bestimmt werden. (6 Punkte)

Aufgabe 4: Eigenvektoren, Eigenwerte

Berechnen Sie die normierten Eigenvektoren und die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(5 Punkte)