Übungsaufgaben zur Vorlesung

# Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, L. Hollender

WS 2009/2010

**Blatt VIII**: Abgabetermin 08.12.2009 vor der Vorlesung

## Aufgabe 1: Veranschaulichung von $z^\nu$

Wie transformieren sich die Linien

$$z = re^{i\varphi} \quad , \quad \text{mit} - \pi < \varphi < \pi \quad \text{und} \quad r = 0.5, 1, 2$$

unter der Abbildung (allgemeine Potenz) $z \mapsto z^\nu$, mit $\nu = i$ ?
Gehen Sie, entsprechend der Formel $z^\nu = e^{\nu \ln z}$ in drei Schritten vor, d.h.

1. $z \mapsto \ln z$ , 2. $\ln z \mapsto \nu \ln z$ , 3. $\nu \ln z \mapsto e^{\nu \ln z}$ .

Zeichnen Sie zu den Punkten 1., 2. und 3. jeweils die komplexe Ebene mit den entsprechenden drei transformierten Linien. Machen Sie kenntlich, welche transformierte Linie zu welcher ursprünglichen gehört. Außerdem muss klar werden, wie Sie die jeweiligen transformierten Kurven erhalten haben. (6 Punkte)

## Aufgabe 2: komplexer Logarithmus

a) Berechnen Sie für den Hauptzweig des Logarithmus

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \ln(x + i\varepsilon) - \lim_{\varepsilon \to 0} \ln(x - i\varepsilon)$$

($\varepsilon > 0$) für $x > 0$ und $x < 0$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Berechnen und zeichnen Sie die Wirkung der Abbildung $\ln(z)$ auf folgende Wege:

$$z = 1 + iy, \text{ mit } -\infty < y < \infty$$
$$z = x + i, \text{ mit } -\infty < x < \infty$$

(4 Punkte)

## Aufgabe 3: analytische Funktionen I

a) Prüfen Sie die Analytizität folgender Funktionen:

$$f_1(z) = x^2 + y^2 \ , \quad f_2(z) = x^2 - y^2 + i2xy \ ,$$
$$f_3(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} \ , \quad f_4(z) = x + 2x^2 - i2y^2 \ .$$

b) Stellen Sie, sofern möglich, diese Funktionen als Funktion von $z = x + iy$ dar (wie z.B. in $f(z) = z^2 + z$).

c) Sei $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $u(x, y) = x^2 - y^2$. Wie muss $v(x, y)$ beschaffen sein, damit $f(z)$ analytisch ist?

d) Kann $u(x, y) = x^2 + y^2$ der Realteil einer analytischen Funktion sein?

(7 Punkte)

**Aufgabe 4: analytische Funktionen II**

Die Funktion $f(z)$ sei definiert durch

$$f(z) = \int_{-1}^{1} d\omega' \frac{A(\omega')}{z - \omega'},$$

wobei $A : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $\omega' \mapsto A(\omega')$ im allgemeinen eine nicht verschwindende Funktion ist.

a) Zeigen Sie, dass $f(z)$ analytisch ist für alle $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

b) Zeigen Sie, dass für bekanntes $f(z)$ die Funktion $A(\omega)$ bestimmt werden kann durch

$$A(\omega) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\delta \searrow 0} \mathrm{Im}\left[f(\omega + i\delta)\right].$$

Hierzu ist es hilfreich erst einmal folgende Identität zu zeigen:

$$\mathrm{Im}\left[\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{x \pm i\epsilon}\right] = \mp\pi\delta(x)$$

Bemerkung: Diese Identität ist der Imaginärteil der Dirac-Identität

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x),$$

wobei $\mathcal{P}$ den Hauptwert bezeichnet. Diese Gleichung ist in folgender Weise zu verstehen:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{x \pm i\epsilon} dx = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{x} dx \mp i\pi \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x) dx,$$

mit einer beliebigen Funktion $g(x)$.

*c) Es sei $f(z)$ gegeben als

$$f(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{4} f(z)}.$$

Bestimmen Sie $A(\omega)$.

(4+4 Punkte)

**Aufgabe 5: komplexe Wurzeln**

Berechnen Sie alle vierten Wurzeln von $x^4 = 81(i + 1)/\sqrt{2}$.

(2 Punkte)