Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, L. Hollender

WS 2009/2010

Blatt IX: Abgabetermin 15.12.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: komplexe Integration

Bestimmen Sie für die vier Funktionen

$$\frac{1}{z^2}\ , \quad \frac{1}{z}\ , \quad 1\ , \quad z$$

das Integral über die Einheitskreislinie. Berechnen Sie dazu direkt das Integral

$$\oint_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\ \dot{\gamma}(t)\ \mathrm{d}t\ ,$$

mit $\gamma(t) = e^{it}$, $a = 0$ und $b = 2\pi$.

Was folgt daraus allgemein für das Integral $\oint_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$ für Funktionen $f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2: komplexe Integration

Sei $\gamma(t) = it$, $0 < t < 1$ ein Integrationsweg in der komplexen Ebene. Gegeben seien folgende Funktionen $f_n(z)$:

$$f_1(z) = e^z\ , \quad f_2(z) = \sin(2z)\ , \quad f_3(z) = 3z^2\ .$$

a) Führen Sie für die $f_n(z)$ die Integration

$$\int_\gamma f_n(z)\ \mathrm{d}z\ , \quad n = 1, 2, 3$$

explizit durch (d.h. Integration über Real- und Imaginärteil unabhängig).

b) Wie lauten die Stammfunktionen der $f_n(z)$?

c) Vergleichen Sie das Ergebnis von a) mit der Differenz der jeweiligen Stammfunktionen an den Integrationsgrenzen.

(5 Punkte)

*Aufgabe 3: komplexe Wurzeln

a) Zeigen Sie, dass die Summe über die n-ten Einheitswurzeln immer verschwindet ($n > 1$). Hierzu ist es hilfreich, wenn man die geometrische Reihe kennt:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, & \text{falls } z \neq 1 \\ n+1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Sei $P(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, d.h.

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad \text{mit } a_k \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass zu jeder Nullstelle x_0 auch das komplex konjugierte $\bar{x}_0$ eine Nullstelle von $P(z)$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4: Wiederholungen

a) Differenzieren Sie die Funktionen

$$f_1(x) = \frac{1}{x} e^{\cos(x)} \quad \text{und} \quad f_2(x) = \frac{\left(1 + \cos\left(x^2\right)\right)^2}{1 + \exp(\cos(x))}.$$

b) Bestimmen Sie die Stammfunktion von $\ln(x)$.
<u>Hinweis</u>: Benutzen Sie partielle Integration und $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^{0} x^2 (x^3 + 1)^{100} dx.$$

d) Berechnen Sie

$$\int_{0}^{10} x^2 \delta(2\cos(x)) dx$$

und

$$\int_{-\infty}^{1/2} e^x \delta(f(x)) dx$$

mit $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$.

e) Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(9 Punkte)