Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik I

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2019/20

Blatt 14: Abgabetermin: Dienstag, der 28.01.2020, 10:00

Aufgabe 1: Rechenregeln – Divergenz und Kreuzprodukt

(4 Punkte)

a) Zeigen Sie zunächst allgemein, dass für die Divergenz des Kreuzprodukts zweier beliebiger Vektorfelder $\vec{u}(\vec{r})$ und $\vec{v}(\vec{r})$ gilt: (3 Punkte)

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}(\vec{r}) \times \vec{v}(\vec{r})) = \vec{v}(\vec{r}) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}(\vec{r})\right) - \vec{u}(\vec{r}) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r})\right) \tag{1}$$

b) Vereinfachen Sie jetzt Gleichung (1) für den Spezialfall $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{a}$ mit einem konstanten Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. (1 Punkt)

Aufgabe 2*: Stromdichte, Magnetfeld und Vektorpotential

(10 Punkte)

Eine stationäre Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ ereugt ein Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$, welches sich folgendermaßen als Integral über die Stromdichte schreiben lässt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \; . \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass für das Magnetfeld aus Gleichung (2) gilt: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$. (3 Punkte)

Gegeben ist jetzt ein Vektorpotential der Form:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}) \tag{3}$$

mit einem beliebigen skalaren Feld $\Lambda(\vec{r})$.

b) Zeigen Sie, dass sich das Magnetfeld Gleichung (2) als Rotation des Vektorpotentials aus Gleichung (3) ergibt, also $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$. (3 Punkte)

c) Die zweite Grundgleichung der Magnetostatik (neben $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$, siehe Teilaufgabe a)) lautet:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \; .$$

Leiten Sie diese Grundgleichung direkt aus der Integraldarstellung (2) für $\vec{B}(\vec{r})$ her. (4 Punkte)

Aufgabe 3: elektromagnetische Wellen – Polarisation

(6 Punkte)

Elektromagnetische Wellen sind nicht-triviale Lösungen der Maxwell-Gleichungen für den quellenfreien Fall, d.h. für $\rho(\vec{r},t) = 0$ und $\vec{j}(\vec{r},t) = 0$. In dieser Aufgabe wird eine monochromatische eben Welle der folgenden Form betrachtet:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

mit

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 \\ 0 \end{pmatrix} \; , \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_2 \end{pmatrix} \; , \quad E_n = a_n e^{i\varphi_n} \; , \; n = 1,2 \; , \; a_n, \varphi_n \in \mathbb{R} \; .$$

Berechnen Sie für die folgenden drei Fälle jeweils den Realteil des elektrischen Feldes $\mathrm{Re}(\vec{E}(\vec{r},t))$ und skizzieren Sie die Zeitabhängigkeit von $\mathrm{Re}(\vec{E}(\vec{r} = \vec{0},t))$ in der y-z=Ebene. (Es gilt jeweils $\varphi_1 = 0$.)

a) $\varphi_2 = 0$, a_n beliebig. (2 Punkte)

b) $\varphi_2 = \pi/2$, $a_1 = a_2 = a$. (2 Punkte)

c) $\varphi_2 = \pi/2$, $a_1 = a$, $a_2 = 2a$. (2 Punkte)

Aufgabe 4: Elektrostatik

(2 Punkte)

a) Welche der folgenden Gleichungen ist im Rahmen der Elektrostatik korrekt? ($\rho(\vec{r})$: Ladungsdichte, $\vec{E}(\vec{r})$: elektrisches Feld, $\Phi(\vec{r})$: elektrostatisches Potential)

$$\square\ \Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \; , \quad \square\ \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\vec{\nabla}\rho(\vec{r}) \; ,$$

$$\square\ \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\rho(\vec{r}) \; , \quad \square\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}) \; .$$

b) Die Ladungsdichte einer Punktladung q am Ort $\vec{a}$ ist gegeben durch $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r}-\vec{a})$. Für das resultierende elektrische Feld bzw. das elektrostatische Potential gilt:

$$\square\ \vec{E}(\vec{r}) = q\frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|^2} \; , \quad \square\ \vec{E}(\vec{r}) = q\frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} \; ,$$

$$\square\ \Phi(\vec{r}) = q\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|^2} \; , \quad \square\ \Phi(\vec{r}) = q|\vec{r}-\vec{a}| \; .$$