Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik I

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2019/20

Blatt 2: Abgabetermin: Dienstag, der 22.10.2019, 10:00

Aufgabe 1: Masse an einer Feder inkl. Schwerkraft

(6 Punkte)

Die Kraft auf einen Körper der Masse m im Schwerefeld, der an einer Feder mit Federkonstante k aufgehängt ist, ist gegeben durch

$$F(x) = -kx - mg \; . \tag{1}$$

a) Wie lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung für diesen Fall? (1 Punkt)

Die allgemeine Lösung $x(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung aus Teilaufgabe a) lässt sich schreiben als Summe der allgemeinen Lösung $x_{\mathrm{h}}(t)$ der entsprechenden homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung $x_{\mathrm{s}}(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung.

b) Bestimme Sie $x_{\mathrm{h}}(t)$, $x_{\mathrm{s}}(t)$ und geben Sie das resultierende $x(t)$ an. (3 Punkte)

c) Die allgemeine Lösung $x(t)$ entspricht einer Oszillation um die Ruhelage x_0 des Potentials $V(x)$. Geben Sie $V(x)$ und x_0 an. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Matrixmultiplikation, Drehmatrix

(7 Punkte)

a) Berechnen Sie das Produkt:

$$CBAB - 3CB$$

für die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

(2 Punkte)

Die Drehmatrizen D_φ für eine Drehung um den Winkel φ in der zweidimensionalen Ebene sind gegeben durch:

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad .$$

b) Geben Sie die Matrix D_φ für folgende Winkel an: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/4$, $\varphi_3 = \pi/2$, $\varphi_4 = \pi$. (1 Punkt)

c) Berechnen Sie $D_{\varphi_i}\vec{b}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ für den Vektor $\vec{b}$ mit $(\vec{b})^{\mathrm{t}} = (1\ 1)$. (1 Punkt)

d) Zeigen Sie, dass für die transponierte Matrix D_φ^{t} gilt: $D_\varphi^{\mathrm{t}} = D_\varphi^{-1}$. (1 Punkt)

e) Die Hintereinanderausführung zweier Drehungen ist wieder eine Drehung. Zeigen Sie, dass entsprechend gilt: $D_\varphi D_{\bar{\varphi}} = D_{\varphi+\bar{\varphi}}$. (1 Punkt)

f) Zeigen Sie für einen beliebigen Vektor $\vec{r}$ mit $(\vec{r})^{\mathrm{t}} = (a\ b)$, dass die Drehung dieses Vektors um den Winkel φ, d.h. $\vec{r}' = D_\varphi \vec{r}$, den Betrag des Vektors nicht ändert. (1 Punkt)

Aufgabe 3: δ-Funktion

(4 Punkte)

Für Integrale über die δ-Funktion gilt (unter anderem) die folgende Rechenregel:

$$\int_a^b \psi(x)\delta(x - x_0)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \psi(x_0) & \text{falls } a < x_0 < b \ , \\ 0 & \text{sonst} \ . \end{cases}$$

$(a < b)$. Dabei ist $\psi(x)$ eine beliebige Funktion. Berechnen Sie mit Hilfe dieser Rechenregel die folgenden Integrale:

a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(2x^2)\delta(x-1)\,\mathrm{d}x \ , \quad \text{(1 Punkt)}$$

b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} (\cos(x) + \sin(x))\,[\delta(x+\pi) + \delta(x-\pi)]\,\mathrm{d}x \ , \quad \text{(1 Punkt)}$$

c)
$$\sum_{n=1}^{10} \int_{-2}^{3} x^2 \delta(x - n + 1/2)\,\mathrm{d}x \ , \quad \text{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 4: Rotation

(3 Punkte)

a) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfelds

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} xy \\ z - x \\ x + z \end{pmatrix} . \qquad \text{(1 Punkt)}$$

b) Beweisen Sie für allgemeine skalare Felder $\varphi(\vec{r})$ und Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r})$ die Gleichung:

$$\vec{\nabla} \times \left(\varphi \vec{A}\right) = \varphi \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla}\varphi \ .$$

(2 Punkte)