Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik I

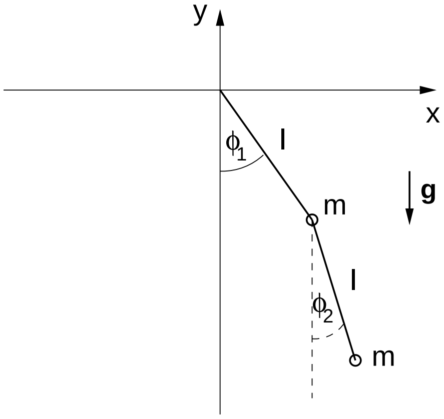
apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2019/20

Blatt 8: Abgabetermin: Dienstag, der 03.12.2019, 10:00

Aufgabe 1: Lagrangeformalismus: Doppelpendel

(10 Punkte)



Gegeben sei ein ebenes Doppelpendel mit den Massen $m_1 = m_2 = m$ und den Pendellängen $l_1 = l_2 = l$. Die Auslenkungswinkel sind (wie in der Abbildung dargestellt) durch ϕ_1 und ϕ_2 gegeben. Die Schwerkraft wirkt in negativer y-Richtung.

a) Formulieren Sie die Zwangsbedingungen und geben Sie die Zahl der Freiheitsgrade an. (2 Punkte)

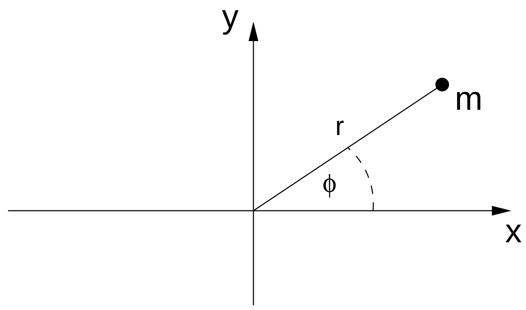
b) Wählen Sie als generalisierte Koordinaten die beiden Winkel ϕ_1 und ϕ_2 und bestimmen Sie damit die Lagrangefunktion des Systems. Hinweise: Die Pendellängen sollen *nicht* von der Zeit abhängen; verwenden Sie das folgende Additionstheorem: $\cos\phi_1 \cos\phi_2 + \sin\phi_1 \sin\phi_2 = \cos(\phi_1 - \phi_2)$. (5 Punkte)

c) Bestimmen Sie damit die Lagrangegleichung 2. Art für ϕ_1 (die entprechende Gleichung für ϕ_2 muss nicht angegeben werden). (3 Punkte)

Aufgabe 2: Lagrangeformalismus: ebene Bewegung mit Zentralkraft

(7 Punkte)

Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem Potential $V(r)$ mit $r = |\vec{r}|$. Abgesehen von der Einschränkung auf die x-y-Ebene (siehe Abbildung) liegen keine weiteren Zwangsbedingungen vor.



a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion dieses Systems mit den generalisierten Koordinaten r und ϕ. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen (Lagrangegleichungen 2. Art). (2 Punkte)

Eine verallgemeinerte Koordinate q_k bezeichnet man als zyklisch, wenn die Lagrangefunktion nicht von dieser Koordinate abhängt.

c*) Welche Koordinate ist also bei der ebenen Bewegung mit Zentralkraft zyklisch? (1 Punkt)

d*) Welche physikalische Größe ist damit erhalten? (1 Punkt)

Aufgabe 3: Newtonsche Mechanik II

(3 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um die Bewegung eines Teilchens der Masse m im zweidimensionalen Potential

$$V(x, y) = -(\cos(x) + \cos(y)) \ .$$

a) Das entsprechende Kraftfeld ist gegeben durch:

$$\Box\ \vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \cos(y) \end{pmatrix} \ , \quad \Box\ \vec{F}(x,y) = (\sin(x) + \sin(y)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\Box\ \vec{F}(x,y) = -\begin{pmatrix} \sin(x) \\ \sin(y) \end{pmatrix} \ , \quad \Box\ \vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ .$$

b) Für welche Punkte $\vec{r}$ liegt eine stabile Ruhelage des Systems vor? $(n, m \in \mathbb{Z})$

$$\Box\ \vec{r}_{n,m} = \begin{pmatrix} n\pi \\ m\pi \end{pmatrix} \ , \quad \Box\ \vec{r}_n = \begin{pmatrix} n\pi \\ n\pi \end{pmatrix} \ ,$$

$$\Box\ \vec{r}_{n,m} = \begin{pmatrix} (2n+1)\pi \\ (2m+1)\pi \end{pmatrix} \ , \quad \Box\ \vec{r}_{n,m} = \begin{pmatrix} 2n\pi \\ 2m\pi \end{pmatrix} \ ,$$

c) Für die Arbeit ΔA entlang des geschlossenen Wegs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Quadrat mit Seitenlänge π) gilt:

$$\Box\ \Delta A = 4\pi \ , \quad \Box\ \Delta A = 0 \ , \quad \Box\ \Delta A = 2 \ , \quad \Box\ \Delta A = 4 \ .$$