Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik in zwei Semestern II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla,

WS 2014/15

Blatt 3: Abgabetermin: Dienstag, der 28.10.2014, 10:00

Aufgabe 1: Orts- und Impulsunschärfe

Betrachten Sie das in der Vorlesung behandelte Problem eines Teilchens in einem eindimensionalen, unendlich hohen Potentialtopf.

$$\mathrm{V}(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & : \text{ für } 0 < x < L \\ \infty & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie für den Grundzustand die Erwartungswerte

$$\langle x \rangle \ , \ \langle x^2 \rangle \ , \ \langle p_x \rangle \ , \ \langle p_x^2 \rangle \ .$$

Zeigen Sie, dass daraus für die Orts- und Impulsunschärfe folgt:

$$\Delta x = L\sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}} \quad , \quad \Delta p_x = \frac{\hbar\pi}{L} \ .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Rechteckpotential

Der eindimensionale Hamiltonoperator

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \ \text{ mit } \ V(x) = \begin{cases} -V_0 & : \ |x| \leq a/2 \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases}$$

($V_0 > 0$) hat für $-V_0 < E < 0$ gebundene (normierbare) Eigenzustände $\psi_n(x)$, darunter solche, die um $x = 0$ symmetrisch sind ($\psi(x) = \psi(-x)$).

a) Lösen Sie zunächst die zeitunabhängige Schrödingergleichung in den drei Bereichen $x \leq -a/2$, $-a/2 \leq x \leq a/2$ und $x \geq a/2$. Beachten Sie, dass nur oszillierende bzw. exponentiell abfallende Funktionen (für $x \to \pm\infty$) erlaubt sind (Normierbarkeit). Das führt für die bzgl. $x = 0$ symmetrischen Lösungen zum Ansatz

$$\psi_n(x) = A_n \cos(k_n x) \ \text{ für } \ -a/2 \leq x \leq a/2$$
$$\psi_n(x) = B_n e^{-\kappa_n |x|} \ \text{ für } \ |x| \geq a/2$$

Wie hängen k_n und κ_n mit E_n zusammen?

b) Zeigen Sie, dass aus der Stetigkeit von $\psi_n(x)$ und $\psi_n'(x)$ an den Stellen $x = \pm a/2$ die Relation κ_n/k_n =tan$(k_n a/2)$ folgt.

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Erwartungswert, Grundzustand des unendlich hohen Potentialtopfes

In der Vorlesung wurden die normierten Eigenfunktionen für das unendlich hohe Potentialtopf-Problem

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right); \quad n = 1, 2, 3, ...$$

hergeleitet. Die diskreten Eigenenergien, gegeben durch $H\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$ sind

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}.$$

Betrachten Sie nun im folgenden eine Wellenfunktion, welche ebenfalls offensichtlich die Randbedingungen $\psi(0) = \psi(L) = 0$ erfüllt

$$\psi(x) = -Ax(x - L).$$

a) Bestimmen Sie durch die Normierung der Wellenfunktion den Koeffizienten A.

b) Berechnen Sie nun den Erwartungswert $< H >$ für diese Funktion.

c) Der Grundzustand eines Systems ist so definiert, dass er den Erwartungswert des Hamilton-Operators minimiert. Treffen Sie, unter Berücksichtigung der in der Vorlesung berechneten Eigenenergien sowie des Erwartungswerts aus Aufgabenteil b), eine Aussage über den Grundzustand des unendlich hohen Potentialtopfes.

(4 Punkte)