Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik in zwei Semestern II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla,

WS 2014/15

Blatt 5: Abgabetermin: Dienstag, der 11.11.2014, 10:00

Aufgabe 1: Lösung des harmonischen Oszillators

Der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators lässt sich schreiben als:

$$H = \tfrac{p^2}{2m} + \tfrac{m\omega}{2}x^2 = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

Seien auch hier ψ_n mit $n \in \mathbb{N}$ die normierten Eigenfunktionen zum Zähloperator $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$.

a) Die Grundzustandswellenfunktion lässt sich aus der Bedingung $\hat{a}\psi_0 = 0$ bestimmen. Lösen Sie die Differentialgleichung $\hat{a}\psi_0 = 0$ durch Einsetzen des Ansatzes $\psi_0 = b_0 \exp\left(-\left(a_0 x^2\right)/2\right)$. Verwenden Sie hierzu $(\psi_0, \psi_0) = 1$.

In der Vorlesung haben Sie die Rekursionsrelation $\hat{a}^\dagger\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$ kennengelernt. D.h. durch die bekannte Lösung ψ_0 der Gleichung $\hat{a}\psi_0 = 0$, können wir alle angeregten Zustände rekursiv berechnen.

b) Jeder Zustand ψ_n lässt sich schreiben als $\psi_n = \hat{O}_n\psi_0$. Bestimmen Sie $\hat{O}_n$.

c) Berechnen Sie nun den ersten angeregten Zustand $\psi_1 = \hat{a}^\dagger\psi_0$.

d) Zeigen Sie, dass ψ_0 und ψ_1 orthogonal sind, also $(\psi_1, \psi_0) = 0$.

Hinweis zu a): $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A\frac{(x-z)^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2\pi}{A}}$ mit $\mathrm{Re}(A) > 0$, $z \in \mathbb{C}$ (6 Punkte)

Aufgabe 2: Leiteroperatoren (Drehimpuls)

In Analogie zu den Operatoren $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ beim harmonischen Oszillator definiert man

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y, \quad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y,$$

wobei $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ die kartesischen Komponenten des Drehimpulsoperators sind.

a) Zeigen Sie die Vertauschungsrelationen

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar \hat{L}_\pm$$

$$\text{die Identität } \hat{\boldsymbol{L}}^2 = \frac{1}{2}(\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+) + \hat{L}_z^2,$$

$$\text{sowie } [\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_\pm] = 0.$$

Nun führen wir die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} mit $l \in \mathbb{N}$ und $m \in \{-l, -l+1, \ldots, l\}$ ein. Sie sind Eigenfunktionen zum Drehimpulsoperator und erfüllen die Eigengleichungen

$$\hat{\vec{L}}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l\,(l+1)\,Y_{lm} \quad ; \quad \hat{L}_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm}$$

b) Zeigen Sie analog zu den Auf- und Absteigeoperatoren, dass $\hat{L}_\pm$ angewendet auf Y_{lm} die Quantenzahl m um 1 erhöht oder erniedrigt. Bestimmen Sie hierzu die Quantenzahl m indem Sie $\hat{L}_z$ auf $\hat{L}_\pm Y_{lm}$ anwenden und die erste Relation aus a) verwenden. $\left(\hat{L}_\pm Y_{l,m} = \phi \propto Y_{l,m\pm1}\right)$

(6 Punkte)

Aufgabe 3: Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators; Kugelflächenfunktionen

Allgemein gilt: $Y_{l,m}(\vartheta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \left[\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}\right]^{1/2} P_l^{|m|}(\vartheta) e^{im\phi}$ mit

$$P_l^m(\vartheta) = (\sin\vartheta)^m \left.\frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\right|_{x=\cos\vartheta}, \quad \text{und} \quad P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Formeln die Funktionen $Y_{1,1}, Y_{1,0}$ und $Y_{1,-1}$.

(2 Punkte)