Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik in zwei Semestern II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, O. Wohak

WS 2013/14

Blatt 1: Abgabetermin: Dienstag, der 22.10.2013, 10:00

Aufgabe 1: komplexe Zahlen

Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 - i \quad , \quad z_2 = 3 + 4i \quad .$$

a) Stellen Sie z_1 in der Form $z_1 = re^{i\varphi}$ dar, d.h. geben Sie r und φ an.

Bestimmen Sie jeweils Real- und Imaginärteil von

b) $z_1 z_2$,

c) $\dfrac{z_1}{z_2}$,

d) $(z_1)^{10}$.

e) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen $z_n = e^{in\pi}$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2: Eigenfunktionen und Eigenwerte

Gegeben sei der Operator

$$\hat{A} = x \frac{\partial}{\partial x} \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass für beliebige $n \in Z$ die Funktionen

$$\psi_n(x) = x^n$$

Eigenfunktionen zum Operator $\hat{A}$ sind.

b) Wie lauten die dazugehörigen Eigenwerte?

c) Wie wirkt der Operator $\hat{A}$ auf die Funktion $\exp(x)$? Verwenden Sie dazu die Darstellung

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad .$$

Ist $\exp(x)$ ebenfalls Eigenfunktion zu $\hat{A}$?

d) Überzeugen Sie sich von der Gültigkeit folgender Aussage: Die Summe zweier Eigenfunktionen zu $\hat{A}$ mit *verschiedenen* Eigenwerten ist keine Eigenfunktion zu $\hat{A}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3: Rechnen mit Operatoren: Kommutator

a) Zeigen Sie die *Jakobi-Identität* für drei beliebige Operatoren $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$:

$$[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]]+[\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]]+[\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]]=0$$

b) Berechnen Sie die Kommutatoren ($i, j = 1, 2, 3$)

$$[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}] \quad , \quad [\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}\cdot\hat{\vec{p}}] \quad \text{und} \quad [x^3, p_x] \; .$$

c) Der Operator des Drehimpulses lautet $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$. Zeigen Sie die Relation

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$$

d) Zwei physikalische Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ (Messgrössen, Observablen) sind gleichzeitig "messbar", wenn sie die selbe Eigenfunktion besitzen. Was folgt daraus für den Kommutator

$$[\hat{A}, \hat{B}]$$

Können Sie ein Beispiel angeben?

(7 Punkte)

Aufgabe 4: Teilchen im Magnetfeld

Der Hamiltonoperator für ein Teilchen der Ladung q und Masse m in einem Magnetfeld $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$ lautet

$$\hat{H}(\vec{A}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r})\right)^2$$

Dieser Hamiltonoperator hängt direkt vom Vektorpotential $\vec{A}$ ab und ändert sich folglich mit der Eichung: $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla f(\vec{r})$. Sei nun $\psi(\vec{r}, t)$ eine Lösung der Schrödingergleichung zu $\hat{H}(\vec{A})$, also

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \hat{H}(\vec{A})\psi(\vec{r},t)$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\psi'(\vec{r},t) = e^{\frac{ie}{\hbar c}f(\vec{r})}\psi(\vec{r},t)$$

eine Lösung der Schrödingergleichung zu $\hat{H}(\vec{A}')$ ist.

b) Was folgt daraus für die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $|\psi(\vec{r},t)|^2$ und $|\psi'(\vec{r},t)|^2$?

(6 Punkte)