übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik in zwei Semestern II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, O. Wohak

WS 2013/14

Blatt 12: Abgabetermin: Dienstag, der 28.01.2014, 10:00

Aufgabe 1: Mikrozustände 1

Betrachten Sie eine Kette aus drei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen in einem Magnetfeld. Jeder Spin kann entweder 'positiv' gerichtet (Energie $+\mu_B$B), oder 'negativ' gerichtet (Energie -μ_BB) sein.

a) Finden und notieren Sie zuerst alle möglichen Mikrozustände des Systems.

b) Gegeben sei nun ein Makrozustand mit der Energie E=μ_BB. Fügen Sie jedem der Mikrozustände die entsprechende Wahrscheinlichkeit hinzu, mit welcher sich das System in diesem wiederfindet.

c) Wie viele Mikrozustände treten bei einer Kette der Länge N auf?

(3 Punkte)

Aufgabe 2: Mikrozustände 2

Betrachten Sie jetzt eine eindimensionale Polymerkette aus N identischen Molekülen. Jedes Molekül befindet sich entweder im Zustand α (mit Energie ϵ) oder β (mit Energie 0), und besitzt zustandsabhängig die Länge a, respektive b.

a) Nutzen Sie die Bezeichnung n_α für die Anzahl der Moleküle im Zustand α, um die Gesamtenergie sowie die Gesamtlänge des Systems anzugeben.

b) Es sei nun gegeben, dass $a = 1$ und $b = 2$. Geben Sie alle Mikrozustände für den Makrozustand $L = 6$ und $E = 4\epsilon$ an.

c) Berechnen Sie die Anzahl der Mikrozustände Ω(E,N), und erklären Sie, warum Ω hier, anders als z.B. beim idealen Gas, nicht von der Länge (bzw. Volumen) abhängt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3: Phasenraum

Gegeben ist ein einzelner harmonischer Oszillator mit Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

a) Bestimmen Sie aus den kanonischen Gleichungen (Hamiltonsche Bewegungsgleichungen) das Verhältnis B/A im Ansatz

$$q(t) = A\sin(\omega t), \quad p(t) = B\cos(\omega t)$$

und A als Funktion der Energie E.

b) Skizzieren Sie die Bahnkurve in der $p/q-$Ebene und berechnen Sie die eingeschlossene Fläche $I(E)$ (das "Phasenraumvolumen"), $\int_0^E dpdq$ als Funktion von E (Tipp: Flächenformel für Ellipsen).

c) Berechnen Sie die Zustandsdichte $\Omega(E)$ aus der Relation

$$\int_0^E dE'\Omega(E') = \frac{I(E)}{2\pi\hbar}$$

und daraus die Anzahl der Zustände im Energieintervall ΔE: $\Omega(E)\Delta E$. Wie gross muss ΔE mindestens sein, damit ein Zustand im Intervall ΔE liegt?

(6 Punkte)

Aufgabe 4: quantenmechanischer Oszillator

Betrachten Sie den harmonischen Oszillator aus Aufgabe 3 jetzt quantenmechanisch. Der äußere Parameter x ist die Frequenz ω.

a) Geben Sie alle Mikrozustände r und deren Energien $E_r(x)$ an.

b) Berechnen und skizzieren Sie die Funktion $\Phi(E, x)$ (Zahl der Zustände mit $E_r(x) \leq E$). Verwenden Sie dazu die Gauss'sche Stufenfunktion $[y] = n$, wobei n die grösste ganze Zahl mit $n \leq y$ ist.

c) Berechnen Sie $\Omega(E, x)$. Achtung: Was ist das minimal mögliche Energieintervall ΔE ?

(5 Punkte)