Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik in zwei Semestern II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, O. Wohak

WS 2013/14

Blatt 3: Abgabetermin: Dienstag, der 05.11.2013, 10:00

Aufgabe 1: Rechteckpotential

Der eindimensionale Hamiltonoperator

$$\hat{H}(x,\hat{p}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \quad \text{mit} \quad V(x) = \begin{cases} -V_0 & : \ |x| \leq a/2 \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases}$$

($V_0 > 0$) hat für $-V_0 < E < 0$ gebundene (normierbare) Eigenzustände $\psi_n(x)$, darunter um $x = 0$ symmetrische.

a) Lösen Sie zunächst die zeitunabhängige Schrödingergleichung in den drei Bereichen $x \leq -a/2$, $-a/2 \leq x \leq a/2$ und $x \geq a/2$. Beachten Sie, dass nur oszillierende bzw. exponentiell abfallende Funktionen (für $x \to \pm\infty$) erlaubt sind (Normierbarkeit). Das führt für die bzgl. $x = 0$ symmetrischen Lösungen zum Ansatz

$$\psi_n(x) = A_n \cos(k_n x) \quad \text{für} \quad -a/2 \leq x \leq a/2$$
$$\psi_n(x) = B_n e^{-\kappa_n |x|} \quad \text{für} \quad |x| \geq a/2$$

Wie hängen k_n und κ_n mit E_n zusammen?

b) Zeigen Sie, daß aus der Stetigkeit von $\psi_n(x)$ und $\psi'_n(x)$ an den Stellen $x = \pm a/2$ die Relation $\kappa_n/k_n = \tan(k_n a/2)$ folgt.

(5 Punkte)

Aufgabe 2: Erwartungswert, Grundzustand des unendlich hohen Potentialtopfes

In der Vorlesung wurden die normierten Eigenfunktionen für das unendlich hohe Potentialtopf-Problem

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right); \quad n = 1, 2, 3, ...$$

hergeleitet. Die diskreten Eigenenergien, gegeben durch $\hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$ sind

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}.$$

Betrachten Sie nun im folgenden eine Wellenfunktion welche ebenfalls offensichtlich die Randbedingungen $\psi(0) = \psi(L) = 0$ erfüllt

$$\psi(x) = -Ax(x - L).$$

a) Bestimmen Sie durch die Normierung der Wellenfunktion den Koeffizienten A.

b) Berechnen Sie nun den Erwartungswert $< \hat{H} >$ für diese Funktion.

c) Der Grundzustand eines Systems ist so definiert, dass er den Erwartungswert des Hamiltonians minimiert. Treffen Sie, unter Berücksichtigung der in der Vorlesung berechneten Eigenenergien sowie des Erwartungswerts aus Aufgabenteil b), eine Aussage über den Grundzustand des unendlich hohen Potentialtopfes.

(4 Punkte)

Aufgabe 3: Schrödinger-Gleichung für den harmonischen Oszillator

Die Schrödinger-Gleichung für den eindimensionalen harmonischen Oszillator lautet

$$\hat{H}(x)\psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der folgenden Anleitung die quantisierten Eigenenergien.

a) Führen Sie die dimensionslose Größe $y = \frac{x}{x_0}$ mit der charakteristischen Länge $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ ein und zeigen Sie, dass sich die Schrödinger-Gleichung zu

$$\psi''(y) - y^2\psi(y) = -2\epsilon\psi(y); \quad \text{mit} \quad \epsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$$

vereinfacht.

b) Benutzen Sie den Ansatz $\psi(y) = u(y)\exp(-\frac{y^2}{2})$ um die gewöhnliche Dgl. zweiter Ordnung

$$u''(y) - 2yu'(y) + (2\epsilon - 1)u(y) = 0$$

für $u(y)$ zu erhalten.

c) Zeigen Sie, dass die Frobenius-Methode mit dem Ansatz $u(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ auf die Rekursionsrelation

$$b_{n+2} = \frac{1 + 2n - 2\epsilon}{(n+2)(n+1)}b_n$$

hinausläuft.

Man kann nun zeigen, dass die Lösung $\psi(y) = \exp(-\frac{y^2}{2})\sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ nicht normierbar ist! Um dies zu umgehen, muss die Potenzreihe nach einer endlichen Zahl von Termen abbrechen.

d) Zeigen Sie deswegen zuerst, dass für ϵ folgt

$$\epsilon = \frac{1}{2} + (m-2),$$

wenn die Potenzreihe nach dem m-ten Term abbricht ($b_m = 0,\ b_{m-2} \neq 0$).

e) Setzen Sie nun im nächsten Schritt zuerst alle b_n mit geraden n gleich Null, und schreiben Sie die ϵ-Werte auf, falls die Reihe nach $m = 3, 5, 7, ...$ abbricht. Wiederholen Sie dies nun für den Fall, dass alle b_n mit ungeraden n gleich Null gesetzt werden und zeigen Sie, dass dies die Quantisierung der Energie, $\epsilon_n = \frac{1}{2} + n$ liefert.

(7 Punkte)