Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik in zwei Semestern II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, O. Wohak

WS 2013/14

Blatt 5: Abgabetermin: Dienstag, der 19.11.2013, 10:00

Aufgabe 1: Leiteroperatoren (Drehimpuls)

In Analogie zu den Operatoren $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ beim harmonischen Oszillator definiert man

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y, \quad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y,$$

wobei $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ die kartesischen Komponenten des Drehimpulsoperators sind.

a) Zeigen Sie die Vertauschungsrelationen

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$$

die Identität $\hat{\boldsymbol{L}}^2 = \frac{1}{2}(\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+) + \hat{L}_z^2,$

sowie $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_\pm] = 0.$

Nun führen wir die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} mit $l \in \mathbb{N}$ und $m \in \{-l, -l+1, \ldots, l\}$ ein. Sie sind Eigenfunktionen zum Drehimpulsoperator und erfüllen die Eigengleichungen

$$\hat{\vec{L}}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l\,(l+1)\,Y_{lm} \quad ; \quad \hat{L}_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm}$$

b) Zeigen Sie analog zu den Auf- und Absteigeoperatoren, dass $\hat{L}_\pm$ angewendet auf Y_{lm} die Quantenzahl m um 1 erhöht oder erniedrigt. Bestimmen Sie hierzu die Quantenzahl m indem Sie $\hat{L}_z$ auf $\hat{L}_\pm Y_{lm}$ anwenden und die erste Relation aus a) verwenden. $\left(\hat{L}_\pm Y_{l,m} = \phi \propto Y_{l,m\pm1}\right)$

c) Betrachten Sie $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_\pm] = 0$. Was können Sie über die Wirkung von $\hat{L}_\pm$ auf die Quantenzahl l sagen?

d) Man kann zeigen, dass folgende Matrizen ebenfalls die Vertauschungsrelationen aus a) erfüllen.

$$l_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad l_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad l_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie dies anhand der in a) erst genannten Relation.

(8 Punkte)

Aufgabe 2: Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators; Kugelflächenfunktionen

Allgemein gilt: $Y_{l,m}(\vartheta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \left[\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}\right]^{1/2} P_l^{|m|}(\vartheta) e^{im\phi}$ mit

$$P_l^m(\vartheta) = (\sin\vartheta)^m \left.\frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\right|_{x=\cos\vartheta}, \quad \text{und} \quad P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Formeln die Funktionen $Y_{1,1}, Y_{1,0}$ und $Y_{1,-1}$.

(2 Punkte)

Aufgabe 3: Wasserstoffatom

a) Zeigen Sie zunächst anhand der Vorlesung, dass der Separationsansatz $\Psi(r, \vartheta, \psi) = R(r) Y_{l,m}(\vartheta, \psi)$ die Schrödingergleichung auf folgende Differentialgleichung für den Radialanteil $R(r)$ führt.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r)\right] R(r) = ER(r)\ .$$

Benutzen Sie dafür den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten.

b) Zeigen Sie nun, dass der Ansatz $R(r) = u(r)/r$ auf folgende Differentialgleichung für $u(r)$ führt:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r)\right] u(r) = Eu(r)$$

Diese Differentialgleichung lässt sich als eindimensionale Schrödingergleichung eines Teilchens der Masse m in einem effektiven Potential $V_{\mathrm{eff}}(r)$ auffassen. Vergleichen Sie $V_{\mathrm{eff}}(r)$ mit dem entsprechenden Ausdruck in der klassischen Mechanik.

(5 Punkte)