Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik in zwei Semestern II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, J. Schmidt

WS 2013/14

Blatt 6: Abgabetermin: Dienstag, der 26.11.2013, 10:00

Aufgabe 1: Zeitabhängige Erwartungswerte

Gegeben sei ein unendlich hoher Potentialtopf beschrieben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathrm{x}}) \text{ mit } V(\hat{\mathrm{x}}) = \begin{cases} 0 & : 0 < x < L \\ \infty & : \text{sonst} \end{cases}$$

Die normierten Eigenfunktionen sind $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und den Eigenfrequenzen $\omega_n = \frac{E_n}{\hbar} = \frac{\hbar\pi^2}{2mL^2}n^2$.
Sei die normierte Wellenfunktion, eines Teilchens mit der Masse m, zum Zeitpunkt $t = 0$ beschrieben durch:

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) + \psi_2(x)) \quad \Rightarrow \quad \psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x)\, e^{-i\omega_1 t} + \psi_2(x)\, e^{-i\omega_2 t}\right)$$

a) Zeigen Sie, dass $\psi(x,t)$ die Schrödingergleichung $\hat{H}\psi = i\hbar\partial_t\psi$ erfüllt.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle x(t)\rangle = \int_0^L \mathrm{d}x\, \psi^*(x,t)\, x\psi(x,t)$, zeichnen Sie ein t-$\langle x(t)\rangle$-Diagramm und interpretieren Sie dieses Ergebnis physikalisch.
Hinweis: Das Ergebnis hat die Form $\langle x(t)\rangle = x_0 + \Delta x \cos(\tilde{\omega}t)$. Sie dürfen verwenden $\int_0^L x\,|\psi_n|^2\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\,\forall\, n \in \mathbb{N}$ sowie $\int_0^L x \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right)\sin\left(\frac{x2\pi}{L}\right)\mathrm{d}x = -\frac{8L^2}{9\pi^2}$.

c) Berechnen Sie nun den zeitabhängigen Erwartungswert für den Hamiltonoperator $\left\langle \hat{H}(t)\right\rangle = \int_0^L \mathrm{d}x\psi^*(x,t)\,\hat{H}\psi(x,t)$. Begründen Sie, warum man ein zeitlich konstantes Ergebnis erhält.
Hinweis: Verwenden Sie, dass $\psi(x,t)$ eine Komposition aus Eigenfunktionen zu $\hat{H}$ ist sowie $\int_0^L \psi_1\psi_2\mathrm{d}x = 0$

(6 Punkte)

Aufgabe 2: Dirac-Notation

Seien $|n\rangle$ Eigenzustände zum Zähloperator $a^\dagger a\,|n\rangle = \hat{n}\,|n\rangle = n\,|n\rangle$, wobei $a^\dagger$ und a die bekannten Auf- und Absteigeoperatoren sind.

a) Berechnen Sie

$$i)\ \left(a^\dagger\right)^4|3\rangle\,, \quad ii)\ a^\dagger a^\dagger a a^\dagger a\,|1\rangle\,, \quad iii)\ \exp\left(a^\dagger\right)|1\rangle\,, \quad iv)\ \exp(a)\,|1\rangle$$

b) Die Zustände $|n\rangle$ bilden eine Orthonormal-Basis, d.h. $\langle m|n\rangle = \delta_{m,n}$. Berechnen Sie $\langle m|\,\hat{H}_1\,|n\rangle$ mit $m, n \in \mathbb{N}_0$ für:

$$i)\ \hat{H}_1 = \alpha\hat{\mathrm{x}}, \quad ii)\ \hat{H}_1 = \beta\hat{\mathrm{p}}$$

Verwenden Sie hierfür $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{\mathrm{x}} + i\frac{\hat{\mathrm{p}}}{m\omega}\right)$ und $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{\mathrm{x}} - i\frac{\hat{\mathrm{p}}}{m\omega}\right)$

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Adjungierte und hermitesche Operatoren

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Sind zwei Operatoren A und B hermitesch, so ist auch ihr *Antikommutator* $\{A, B\} = AB + BA$ hermitesch.

b) Aus A, B hermitesch folgt i.a. nicht, daß auch ihr Produkt AB hermitesch ist. Zeigen Sie dies explizit für $A = \hat{x}$ und $B = \hat{p}$. Welche Bedingung müssen A und B erfüllen, damit auch AB hermitesch ist?

(4 Punkte)

Aufgabe 4: Zeitunabhängige Störungstheorie: unendlich hoher Potentialtopf

Gegeben sei ein Teilchen der Masse m im eindimensionalen Potential

$$V_0 = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 < x < \pi \\ \infty & x > \pi \end{cases}$$

Berechnen Sie die Energien E_n ($\forall n \in \mathbb{N}$) in erster Ordnung, das heißt $E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$, für die Störung $\hat{H}_1$ aus Aufgabe 2b).

Hinweis: Sie können die Angaben in Aufgabe 1 mit $L = \pi$ verwenden.
Die erste Korrektur zu der Eigenenergie E_n ist gegeben durch $E_n^1 = \langle\psi_n|\,\hat{H}_1\,|\psi_n\rangle = \int_0^\pi \psi_n^* \hat{H}_1 \psi_n \mathrm{d}x$

(3 Punkte)