Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik in zwei Semestern II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, J. Schmidt

WS 2013/14

Blatt 8: Abgabetermin: Dienstag, der 10.12.2013, 10:00

Aufgabe 1: Zwei-Zustands-System

Gegeben sei die orthonormale Zustandsbasis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Der zugehörige Hamilton-operator sei beschrieben durch

$$\hat{H} \;=\; \hbar\omega \left\{ |0\rangle\langle 0| + 4\,|0\rangle\langle 1| + 4\,|1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \right\}$$

a) Identifizieren Sie die Zustände mit der euklidischen Basis $|0\rangle := \vec{e}_1$, $|1\rangle := \vec{e_2}$ und geben Sie $\hat{H}$ in Matrixdarstellung an.

b) Bestimmen Sie die Eigenenergien und Eigenzustände in euklidischer Basis.

c) Formulieren Sie nun den Hamiltonoperator in Bra-Ket-Notation bezüglich der Eigenzustände $|\psi_i\rangle$

d) Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung und geben Sie die zeitliche Entwicklung für $|\psi(0)\rangle = a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle$ an. Dabei sind die $|\psi_i\rangle$ die Eigenzustände des Hamiltonoperators und $a_i \in \mathbb{C}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator mit quadratischer Störung

Gegeben sei ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit quadratischem Störterm:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + \lambda x^2\right) \\ &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\tilde{\omega}^2 x^2 \end{aligned}$$

a) Drücken Sie $\hat{H}$ durch die folgenden ungestörten Auf- und Absteigeoperatoren aus:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{\mathrm{x}} + i\frac{\hat{\mathrm{p}}}{m\omega}\right) \qquad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{\mathrm{x}} - i\frac{\hat{\mathrm{p}}}{m\omega}\right)$$

b) Berechnen Sie die erste und zweite Korrektur der Energie

c) Geben Sie nun die exakten Energien an und führen Sie eine Taylorentwicklung zweiter Ordnung in λ durch. Was stellen Sie beim Vergleich der exakten Entwicklung und der Störungstheorie fest?

(4 Punkte)

Aufgabe 3: Partielle Ableitungen

a) Gegeben ist die Funktion

$$A(x, y, z) = x^3 \arcsin(xy) + e^z y$$

Berechnen Sie die Grössen

$$\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial z}, \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x},$$

und überprüfen Sie die Relation $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}$

b) Gegeben ist $z(x, y) = y \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$. Berechnen Sie die Funktionen $y(x, z)$ und $x(z, y)$.

c) Prüfen Sie die folgende Identität an dem Beispiel aus b)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1$$

(5 Punkte)