Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. M. Zirnbauer
D. Wieczorek

Klassische Theoretische Physik I
Prüfung

SS 15

Hinweise: Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Bitte benutzen Sie außer Stift und Papier keine weiteren Hilfsmittel. Geben Sie am Ende der Prüfung bitte kein Konzeptpapier mit ab und reichen Sie von jeder Aufgabe nur eine Bearbeitung ein. Es empfiehlt sich, zuerst das Aufgabenblatt komplett durchzulesen.
Zum Bestehen müssen Sie in Teil A **20 Punkte** von 30 möglichen erreichen und insgesamt **35 Punkte** von 70 möglichen.

Beschreiben Sie bitte **keine Rückseiten**.

Teil A

Dieser Teil der Prüfung enthält Aufgaben zu den Grundlagen der Vorlesung.

1. Kurzfragen

3+1+2+4+1+1+1+2+3=18 Punkte

Bitte bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben **kurz** und **präzise**.

a) Geben Sie die drei Newtonschen Gesetze an.

b) Was versteht man unter dem effektiven Potential der Radialbewegung?

c) Geben Sie die elektrische Feldstärke und Erregung einer Punktladung an.

d) Definieren Sie folgende Begriffe: Drehgruppe, $\mathfrak{so}(3)$, Trägheitstensor, Hauptachsen.

e) Es sei $\beta \in \Omega^k(M)$. Durch welche Forderung ist $*\beta$ definiert?

f) Geben Sie die Normalform einer Drehung an.

g) Wie lautet der Satz von Steiner?

h) Welchen Anschlussbedingungen an Grenzflächen genügen D und E?

i) Für ein Gebiet $U \subset \mathbb{E}_3$ und den Laplaceoperator Δ sei $G : U \times U \to \mathbb{R}$ die Greensche Funktion. Geben Sie die definierenden Eigenschaften und die Interpretation von G an.

2. Winkelgeschwindigkeit

2+1+2=5 Punkte

Es sei $\alpha(t)$ der Ort des Aufpunkts eines starren Körpers zur Zeit t und $\gamma_i(t)$ der Ort eines Punkts auf dem Körper zur Zeit t. Wir setzen $q(t) = \gamma_i(t) - \alpha(t)$, $q = \gamma_i(0) - \alpha(0)$. Es gibt dann eine Kurve $R(t)$ in SO(3), sodass $q(t) = R(t)q$ gilt.

a) Geben Sie die Definition der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ an und zeigen Sie, dass $\dot{q}(t) = \omega(t)q(t)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $\omega(t)$ schief ist.

c) Geben Sie die Normalform von $\omega(t)$ an und erläutern Sie die Bedeutung der beiden auftauchenden Größen.

3. Erhaltungssätze

2+2=4 Punkte

Zeigen Sie durch eine explizite Rechnung:

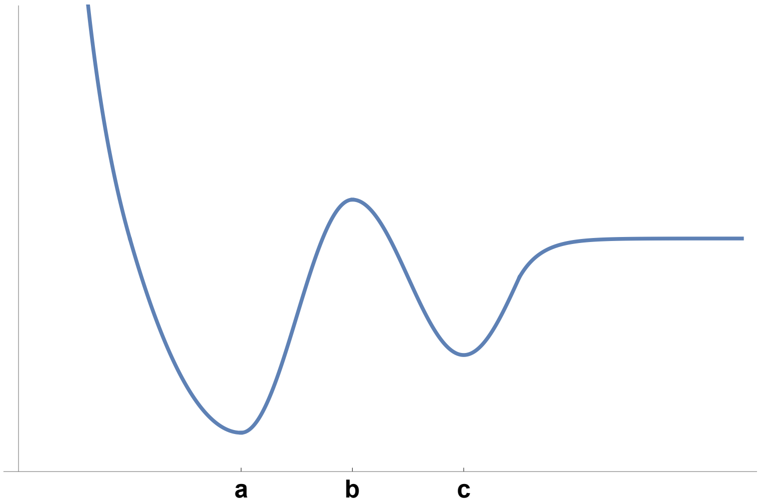
a) Bei der Bewegung eines Massenpunkts in einem konservativen Kraftfeld ist die Gesamtenergie erhalten.

b) Bei der Bewegung eines Massenpunkts in einem Zentralkraftfeld ist der Drehimpuls bzgl. des Zentrums erhalten.

4. Phasenportrait

3 Punkte

Wir betrachten ein autonomes Hamiltonsches System mit einem Freiheitsgrad. Skizzieren Sie für das abgebildete Potential ein Phasenportrait.

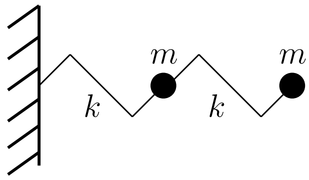


Teil B

Teil B enthält Aufgaben, die etwas näher an den üblichen Übungsaufgaben liegen.

5. Schwingungen *7 Punkte*

Die Abbildung zeigt ein eindimensionales System aus zwei Punktmassen m, die durch Federn der Stärke k verbunden sind. Berechnen Sie die charakteristischen Frequenzen sowie die Normalschwingungen. Skizzieren Sie anschließend die Normalschwingungen.



6. Galilei-Gruppe *2+2+2=6 Punkte*

x_μ seien die affinen Koordinaten zu einem fest gewählten Galilei-System $\{o; e_0, e_1, e_2, e_3\}$; wir setzen $x_0 \equiv t$. Ein Element g der orthochronen Galilei-Gruppe wirkt dann gemäß

$$g^*(t, \mathbf{x}) = (t + b, R\mathbf{x} + \mathbf{w}t + \mathbf{a}) \ .$$

a) Wie viele Parameter hat die Gruppe und was ist deren jeweilige Bedeutung?

b) Es sei g' ein weiteres Element der Galilei-Gruppe mit

$$g'^*(t, \mathbf{x}) = (t + b', R'\mathbf{x} + \mathbf{w}'t + \mathbf{a}') \ .$$

Zeigen Sie, dass die Galilei-Gruppe abgeschlossen ist, d.h. finden Sie für die Verknüpfung $g'' = gg'$ Ausdrücke für $b'', R'', \mathbf{w}''$ und $\mathbf{a}''$.

c) Finden Sie mit Hilfe von b) das zu g inverse Element.

7. Symmetrische Ladungsverteilung *3+4=7 Punkte*

a) Eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho = \chi(r)\,\mathrm{dVol}$ verursacht eine kugelsymmetrische elektrische Feldstärke $E = f(r)dr$. Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen $f(r)$ und $\chi(r)$ her.
Hinweis: In Kugelkoordinaten gilt $*dr = [r^2 \sin\theta d\theta \wedge d\phi, \text{rechts}]$.

b) Finden Sie mit Hilfe von a) die elektrische Feldstärke und das elektrische Potential einer homogen geladenen Kugelschale mit innerem Radius R_i, äußerem Radius R_a und Gesamtladung Q.

8. Plattenkondensator *4+1=5 Punkte*

a) Bestimmen Sie die Kapazität pro Flächeneinheit eines Kondensators, der aus zwei parallelen, unendlich ausgedehnten Metallplatten im Abstand d gebildet wird.

b) Visualisieren Sie das elektrische Feld (für den Plattenkondensator) als Ketten $D \in C_1(K)$ und $E \in C_2(\tilde{K})$.

9. Kräftefreier symmetrischer Kreisel *6 Punkte*

Wir betrachten einen kräftefreien starren Körper mit Zylindersymmetrie, d.h. für die Hauptträgheitsmomente gilt $I_1 = I_2 \neq I_3$. Finden Sie für diesen Fall die Lösung der Eulerschen Gleichungen

$$I_1 \dot{\tilde{\omega}}_1 + \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_3 (I_3 - I_2) = 0 \text{ (und zyklisch).}$$

Beschreiben Sie anschließend die Bewegung des Kreisels aus Sicht des körperfesten und raumfesten Systems (ohne Herleitung).

10. Greensche Reziprozität *1+2+2+2+2=9 Punkte*

$\rho = -\Delta\Phi$ und $\rho' = -\Delta\Phi'$ seien zwei Lösungen der Poisson-Gleichung für ein kapazitives Netzwerk.

a) Was bedeutet Greensche Reziprozität in diesem Fall?

b) Erläutern Sie, was ein Poisson- und ein Dirichlet-Problem ist.

c) Erläutern Sie die physikalische Bedeutung des Poisson-Kerns und geben Sie die allgemeine Lösung des Poisson-Problems für die Knotenladungen am Rand an.

d) Es sei nun Φ, ρ die Lösung eines Dirichlet- und Φ', ρ' die Lösung eines Poisson-Problems. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\sum_{\text{A Innenknoten}} \Phi(A)\rho'_A + \sum_{\text{B Randknoten}} \Phi(B)\rho'_B = 0\,.$$

e) Verwenden Sie diese Beziehung, um die allgemeine Lösung des Dirichlet-Problems für das Potential auf Innenknoten anzugeben.